Óscar Uribe Villegas

curvas s ciográficas

Fundamento matem y técnica de aplicación

UNAM

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES SOCIALES

I N S T I T U T O   D E   I N V E S T I G A C I O N E S   S O C I A L E S

C U R V A S   S O C I O G R A F I C A S

Fundamento Matemático y Técnicas de Aplicación

por

Oscar Uribe Villegas

M E X I C O, 1 9 6 9

Primera edición: 1969

Ciudad Universitaria. México 20, D. F.

DIRECCION GENERAL DE PUBLICACIONES

Impreso y hecho en México
Printed and made in Mexico

Inst. de Invest. Sociales 1970

Al Doctor José Gómez Robleda,

Maestro y Amigo.

P R O L O G O .

Estas páginas constituyen lo que --en forma un tanto despectiva-- se suele clasificar, dentro de la producción bibliográfica, como un "Curso". O sea, que su "originalidad" no hay que buscarla en la substancia misma --en su materia-- sino que --en caso de tenerla-- quizás podría encontrarse en su forma; en la presentación de esa materia. Esta se ha tratado de exponer con máximo detenimiento, con claridad meridiana, a fin de evitar al estudioso --hasta el máximo-- los tropiezos. Esto, a veces, se ha llevado al extremo. Y eso puede parecer ofensivo para la mayor inteligencia y preparación de algunos lectores, pero preferimos éste al otro riesgo: el de considerar superflua una explicación que puede resultar indispensable para las "pequeñas fortunas intelectuales".

"Curvas Sociográficas" trata de satisfacer una necesidad de tipificación estadístico-social. Esta, insuficiente de por sí para la explicación sociológica (como todas las elaboraciones estadísticas) puede y debe ser --con todo-- punto de partida para la misma.

Hemos elegido el sistema pearsoniano para enriquecer el instrumental necesario para la tipificación estadístico-social. Lo hicimos no sólo por sus virtudes intrínsecas sino también porque éste --con su cerrada red de interrelaciones--puede contribuir, por la vía matemática, a la formación mental rigurosa de los estudiantes de ciencias sociales.

El sistema ha sido expuesto --aunque no con muchas variantes ni en forma muy detenida-- por estadísticos eminentes, y a sus exposiciones (comprimidas, a veces, en tres o cuatro páginas de un tratado magistral) pueden recurrir, en forma directa, los más entendidos y preparados. Por desgracia, en su mayoría, esas presentaciones (publicadas en otros países y en otros idiomas) o no son inmediatamente accesibles en nuestro medio (en donde ni siquiera las exposiciones clásicas figuran con abundancia en nuestros anaqueles, o dan por supuesto un nivel de preparación matemática que no es el más generalizado entre nosotros.

De ahí que nuestra labor haya sido --casi exclusivamente-- la de aclarar, detallar y construir, paso a paso, el esistema. Tratamos de no perder de vista, con todo, el plano general, que permite su más rápida aprehensión de conjunto. Seguimos un proceso expandente. Nos llevó éste, de la curva normal (sistema de orden cero) al sistema asimétrico (sistema de primer orden). De él pasamos al conocido generalmente como pearsoniano (sistema de segundo orden) con sus dos tipos principales de curva y algunas variantes importantes.

Sin embargo, como los destinatarios de estas páginas buscarán en ellas las soluciones más simples y prácticas, hemos hecho que transijan dos empeños:el sistemático (que pide la explicación del sistema con todas sus variantes y detalles) y el pragmático (que reduciría todo a formulario y ejemplificaciones).

Dentro de este espíritu, hemos consisderado el subsistema simétrico(que cumple, para el sistema de segundo orden, la función que le corresponde a la curva normal respecto del de primer orden). Esto permite que --para todos los fines prácticos-- se cuente con varios tipos de curva, suficientemente adecuados para describir una distribución sin tener que recurrir, por ejemplo, al segundo tipo principal de curva pearsonana. Esta última, como lo reconocen incluso los grandes maestros de la estadística, es de difícil interpolación. Además, como lo mostrarán los desarrollos, representa un refinamiento --en ocasiones excesivo--de otras curvas más simples. De paso, el sub-sistema anticipa --pedagógicamente-- en términos de mayor simplicidad (en cuanto a derivación de fórmulas y aplicación de las mismas), el sistema más amplio.

La presentación física de los materiales puede requerir unas palabras. Separamos aquí el texto (auxiliar siempre, en las obras matemáticas) de las fórmulas (sobre las que debe recaer el peso de la exposición). Con ello, quisimos evitar el hibridismo de las presentaciones habituales. Si lo hubiésemos podido hacer, habríamos ido más lejos: habríamos grabado el texto en cinta magnetofónica y fotografiado el formulario, para constituir una serie de diapositivas, réplica de los "pizarrones" que habría podido escribir un profesor durante el desarrollo de su cátedra. Sin haber llegado a esos extremos, creemos que nuestra presentación posibilita las comparaciones a lo ancho y a lo largo de las páginas, y creemos que sólo mediante ellas se pueden comprender los procesos de derivación de fórmulas y de substitución de valores. Sin esas comparaciones en dos direcciones (cuatro sentidos) el estudio y el aprendizaje de las matemáticas resulta enormemente difícil.

Como es natural, nuestro medio de expresión --escrita--- nos ha impuesto ciertas opciones que no hubiéramos tenido que hacer en medios distintos. La redacción original (en máquina dotada sólo de caracteres latinos y no de griegos) nos obligó --a veces-- a suplir estos últimos por los latinos que más se les parecen físicamente (nus suplidas por ves; mus suplidas por ues). En veces, esto ha pasado a la versión definiva, sin dañarla en el fondo.

En ocasiones, también, optamos por escribir "fracciones de tendero".Esperamos que ello no haga estremecer a los manes de D. Luis Gutiérrez, maestro toluqueño, muy querido, que nos enseñó a devalorar tales notaciones. Lo hicimos para facilitar la escritura y para evitar los equívocos que resultan (en los exponentes fraccionarios, sobre todo), particularmente cuando no hay manera de distinguir tipográficamente, en cuanto a tamaño, el elemento exponenciado (muy simple) y el exponente (a veces un tanto complicado).

Algunos de los problemas anteriores resultaron menos agudos gracias a que en un momento dado contamos con una máquina de distinto tipo y dotada de caracteres griegos, que utilizamos gracias a la bondad de la Señorita Profesora Ifigenia Frangos, a quien expresamos, desde aquí, nuestro cordial agradecimiento.

Creemos, con todo, que aún en nuestras opciones más discutibles, las ganancias pudieron superar a las pérdidas.

Agradecemos al Señor Santiago Argott González el cuidado minucioso y la simpatía intelectual con que revisó el borrador de nuestro trabajo, así como las correcciones que nos sugirió introducir--con tan buen juicio. No hay que decir que los errores que subsistan nos son enteramente imputables y que de ellos nos reconocemos, desde ahora, responsables.

Al entregar estas páginas al público, lo hacemos,,como siempre, con afán de servirlo; con el ánimo de compartir los resultados de un estudio que no siempre nos resultó fácil a nosotros mismos, a fin de que quienes de ellos se sirvan puedan ahorrar energías e invertirlas más provechosamente en otros campos, para beneficio de todos.

Nos alivia un poco el considerar que si el Dr. Pablo González Casanova nos dió su apoyo e hizo posible que se publicaran estas páginas es porque, tanto en su anterior desempeño como Director de la Escuela Nacional de Ciencias Políticas y Sociales, como en el actual, de Director del Instituto de Investigaciones Sociales (en nuestra Universidad Nacional de México) ha podido palpar la necesidad que tenemos de contar con un equipo más amplio de técnicas sociográficas, y de medios para la tipificación estadístico-social, a fin de obtener una capacitación crecientemente rigurosa y fructífera de la realidad social.

CURVA ESTUDIADA EN LAS PRIMERAS APROXIMACIONES A LA ESTADISTICA

	CURVA NORMAL	

CURVAS CUYO ESTUDIO TRATA DE ABARCAR ESTE OPUSCULO.

	LEPTO CURTICA SIMETRICA	
MESO- CURTICA ASIMETRI CA	CURVA NORMAL	MESO- CURTICA ASIMETRI- CA
	PLATI CURTICA SIMETRICA	

0. I N T R O D U C C I O N.

0.1 UTILIDAD DE LA DESCRIPCION ESTADISTICO-SOCIAL.

Los fenónmenos sociales se pueden someter a un primer intento de aprehensión científica mediante descripciones estadísticas. Para que tales descripciones sean posibles, se comenzará por medir --como primera etapa-- uno o más de los caracteres del fenómeno por estudiar ("medir" significa comparar cada carácter o rasgo con un carácter análogo que se toma como unidad). Esta operación produce un conjunto de medidas que, en una segunda etapa, será necesario ordenar, mediante la formación de series crecientes o decrecientes de valores. En una tercera etapa, ese conjunto de medidas ya ordenadas deberá sujetarse a alguna elaboración que permita mostrar que la serie de valores tiene expresión matemática. En una etapa final, habrá que interpretar, en términos sociológicos, la expresión matemática obtenida.

A través de ese procedimiento, se pasa de los niveles más bajos a los más altos de abstracción. En los primeros, para describir el fenómeno, era necesario detenerse en todos y cada uno de los detalles, de cada uno y de todos los individuos del conjunto. En cambio, en los segundos, todos esos detalles individuales --múltiples y aparentemente dispares--- quedan subsumidos en una expresión matemática o una curva típica, de características conocidas y fáciles de interpretar.

Sustituir el conjunto desordenado de los caracteres de los individuos que forman el colectivo por una fórmula o una curva que expresen matemáticamente dicho conjunto, nos permite que nos refiramos más laconicamente al fenómeno (etapas primera a tercera). Pero, además, nos permite (cuarta etapa) que encontremos con mayor facilidad las conexiones estructurales, funcionales y, en el mejor de los casos, causales y significativas del fenómeno.

De ahí la importancia de las descripciones estadísticas --basadas en fórmulas o en curvas-- en cuanto primer paso de la aprehensión científica.

0.2 NECESIDADES DE LA TIPIFICACION SOCIAL Y POSIBILIDADES DE LA SISTEMATIZACION ESTADISTICA.

Esas descripciones estadística --que tan importantes son en cuanto primer paso en el proceso científico de aprehensión de la realidad-- dependerán, en grado considerable, de que existan ciertas fórmulas y curvas típicas. Gracias a esa previa existencia de tipos de fórmulas y de curvas, se podrá comparar una distribución de medidas obtenidas de la realidad social, con uno de esos tipos de distribución. Por describir la realidad social, a esas expresiones analíticas o geométricas se les puede denominar "fórmulas o curvas sociográficas". La comparación con ellas permite elegir el tipo que represente en forma más conveniente la distribución concreta de que se trate. O sea, que el resultado final no es puramente descriptivo, sino tipificador.

De ahí que las posibilidades de descripción y tipificación estadística adecuadas estén en relación directa del número (más o menos grande) de fórmulas y curvas típicas de que se pueda disponer en calidad de términos con los que comparar las distribuciones concretas.

De ahí, también, el interés que tiene extender --tanto como se pueda- el repertorio de expresiones matemáticas y curvas típicas de que puede disponer el estudiante o el estudioso de las ciencias sociales. Conforme más extenso sea ese repertorio, será más fácil encontrar una expresión o curva típica que describa con máximo rigor y precisión (dentro de grados de simplicidad compatible con ellos) una distribución determinada que haya que estudiar.

En los cursos de estadística elemental --según muestra cualquier texto destinado a ellos-- las expresiones analíticas y curvas que pueden describir las distribuciones de caracteres sociográficos se reducen a un mínimo. En el campo de las distribuciones discontínuas, se estudia única (o casi únicamente) la distribución binomial y, en el de las contínuas, la normal es la única que se estudia. Esto --como punto de partida-- no es conocimiento que pueda despreciar el estudiante; pero, en cambio, puede determinar serias limitaciones en sus actividades de investigación, si no amplía convenientemente sus conocimientos.

En efecto, una buena pedagogía conseja utilizar dentro de las aulas ejemplificaciones más o menos artificiosas o simplificadas. Pero, tan pronto deja éstas el estudiante, la práctica se encarga de enfrentarlo a distribuciones surgidas de la realidad cotidiana, ajenas a la conveniente simplificación o al artificio orientado hacia un fin. En este enfrentamiento, suele descubrir que la mayoría de las distribuciones discontínuas difiere de la binomial y, por otra parte, que es difícil reducir la mayoría de las continuas a la distribución o curva normal.

Cuando esas distribuciones teóricas centrales (binomial y normal)difieren poco de la distribución empírica, el estudiante puede utilizar esos tipos matemáticos y, al emplearlos para expresar la realidad no la deforma mucho. Las interpretaciones sociológicas a las que conduce dicha utilización--a su vez-- pueden llegar a tener validez; ésta será tan alta como pequeña sea la diferencia entre la distribución y la expresión matemática o curva típica. Esta diferencia se mide estadísticamente en términos de desviaciones-promedio. Cuando la desviación-promedio es grande, usar esos tipos centrales únicos representa un serio riesgo: su uso hará que la descripción deforme la realidad, y esa deformación repercutirá en las interpretaciones que --como se sabe-- deben basarse, siempre, en una descripción que, en lo posible, sea fiel a esa realidad.

Incluso en el nivel elementalísimo de preparación matemática en que pudimos movernos al redactar una <u>Técnicas Estadísticas para Investigadores Sociales</u>, frente a la manifiesta necesidad de extender las disponibilidades en este terreno, recurrimos a la presentación de un sistema de curvas continuas (curvas de Gram-Charlier). Miediante él, se pueden representar no sólo las distribuciones simétricas (como ocurre con la curva normal) sino otras francamente asimétricas. Pero, ese sistema tiene limitaciones bien conocidas. Entre ellas, es de importancia la que consiste en que, a veces, aparecen frecuencias negativas que o son difíciles de interpretar o hay que considerar como de imposible interpretación. Con todo, en su momento, ese sistema pudo llenar una laguna en la preparación de los estudiantes de estadística de la Escuela Nacional de Ciencias Políticas y Sociales (de México) a quienes estaba destinado.

Lo poco satisfactorio del sistema de Gram-Charlier y el mayor conocimiento o la mayor preparación matemática media en nuestra sociedad, nos lleva a poner en manos de quien estudia lo social, desde un ángulo científico, en México y en los otros países latinoamericanos, un sistema de curvas asimétricas contínuas que --a más de no presentar los inconvenientes del de Gram-Charlier-- puede mantenerse dentro de los límites de una preparación matemática si no modestísima sí, por lo menos, mediana.

5

1. L A S   C U R V A S   S I M E T R I C A S   C E N T R A L E S.

De acuerdo con una norma prudente, que nos impone partir de lo conocido para llegar a lo desconocido, tomaremos como punto de partida las distribuciones simétricas, ya conocidas. O sea, que usaremos la distribución binomial (discontínua) que tiende a la distribución normal(continua).

La distribución binomial se puede expresar en la forma de la referencia 1.01

En esta fórmula: f(S) representa la frecuencia con la que aparece el carácter S (número de soles obtenidos, por ejemplo, al tirar al aire un cierto número de monedas); M representa el número de individuos del conjunto (número de monedas que se arronan al iare); p, la probabilidad que hay de que salga un sol con una moneda.

Por consiguiente, 1-p representa la probabilidad (complementaria)que hay de que no salga el carácter considerado (la probabilidad de que salga un ágila). M-S señala el número (complementario respecto a M) de individuos que, en el conjunto, no mostraron el carácter S (número de monedas que, tras haber caído, muestran águilas y no soles en su cara visible).

1.1 LA CURVA BINOMIAL SIMETRICA.

Si se recuerda el estudio de la distribución binomial, se recordará también que p y 1-p pueden ser diferentes. Esto ocurre cuando se trata de determinar las probabilidad que hay de obtener un "seis" al lanzar un dado (o

7

sea, $p = 1/6$/ y la --complementaria-- que hay de obtener un "número que no es seis" al lanzar dicho dado ($1-p = 5/6$).

Sin embargo, para partir del caso más sencillo, consideraremos una distribución binomial en la que p y 1-p sean iguales (según ocurre en el caso de las probabilidades que hay de obtener un sol o un águila con una moneda, ya que, en tal caso,($p = 1/2$ y $1-p = 1-1/2$) tanto p como 1-p son iguales a un medio.

En el caso de una binomial como ésta, la expresión anterior se convierte en la referencia 1.11.

1.11 La Pendiente de la Binomial Simétrica.

1.111 Frecuencia Inmediata Superior.- La expresión que acabamos de escribir representa la frecuencia con la que aparecen S soles con M monedas. La expresión que da la frecuencia con la que aparecerán S+1 soles, si se utiliza el mismo número de monedas (M), es la dada por la referencia 1.111.

1.112 Incremento.-Si restamos de la última expresión la previsa (de la 1.111 la 1.11), obtendremos el incremento que sufren las frecuencias, cuando la variable (que ha pasado de S a S+1) se incrementa en una unidad. Si dicho incremento se representa por delta mayúscula de f(S), tendremos la referencia 1.112.

1.113 Frecuencia Intermedia.- En forma parecida, si sumamos las dos expresiones (1.11 y 1.111) y dividimos la suma resultante entre dos, obtendremos la frecuencia correspondiente a un valor intermedio. Esto lo representaremos por f(S+.5), según la 1.113.

1.114 Pendiente.- Si dividimos el incremento o expresión (1.112) entre la frecuencia intermedia (1.113), obtendremos la pendiente, dada por la referencia 1.114.

En esta expresión, el 2 del numerador procede del 2 que figuraba en el denominador de f(S+.5). La fracción del segundo miembro se puede simplificar, ya que p elevado a la M figura en el numerador y en el denominador y como factor de ambios, se reduce a la unidad. Una simplificación ulterior se puede lograr si se considera la equivalencia del factor combinatorio ("combinaciones de M en S+1" o $\binom{M}{S+1}$ en términos de $\binom{M}{S}$ dada por la referencia 1.1141.

La sustitución del factor combinatorio por su equivalente nos permite escribir la 1.1142.

Expresión es ésta en la que, tras la substitución, se ha sacado como factor común al coeficiente combinatorio de M en S. Como dicho coeficiente figura en el numerador y en el denominador, se reduce a la unidad. Reducido este coeficiente, es posible escribir, como segundo miembro de la ecuación, la referencia 1.1143.

En esta expresión, se han ejecutado las operaciones de dentro de los paréntesis de la 1.116. El resultado hace figurar S+1 como denominador tanto de la fracción numeradora como de la fracción denominador y, por tanto, S+1 se reduce a la unidad. Si, además, se realizan las operaciones indicadas en los numeradores de la fracción numeradora y en los de la fracción denominadora, se obtiene, como segundo miembro, la expresión, 1.1144.

1.115 Simplificación.-En la última expresión se pueden recònocer: en el numerador, un término variable (-4S) y la suma de dos términos constantes (2M+2); en el denominador, dos términos constantes (M y 1). Si representamos por x (equis minúscula) la expresión variable (-4S), y por a y b las sumas de constantes (2M+2) y (M+1), la expresión anterior puede reducirse a la 1.115.

1.116 Derivada.- Por lo que se refiere al primer miembro de la igualdad 1.114 (que es, simultáneamente, el primer miembro de la 1.116) ésta se puede considerar, --en el límite-- como la derivada de la función con respecto a la variable, dividida entre la función misma; o sea, como aparece en la 1.116.

Según esto, doda la expresión se puede escribir como lo indica la referencia 1.117. En ella, la relación de la derivada ($D_x y$) respecto de la función (y) resulta igual a un cociente de la variable incrementada en una constante (a) dividida entre otra constante (b).

Esta expresión corresponde, por tanto, a la forma diferencia de la curva hacia la que tiende la binomial cuando de discontinua pasa a continua; o sea, cuando, en vez de crecer "por saltos", crece por incrementos infinitamente pequeños. Escrita en su forma diferencial, es probable que el estudian-

10

te no reconozca una curva que, en otras condiciones, le es bien conocida: la curva normal. Ello se debe a que la ha manejado siempre en su forma integral.

1.2 LA CURVA NORMAL

1.21 La Forma Integral de la Curva.

A fin de mostrar el proceso que lleva de la forma diferencial de la ecuación a la integral, tomaremos las integrales de ambos miembros de la ecuación (con respecto a x). Para expresarlo en fórmulas, antepondremos a cada uno de los miembros el operador lese alongada (o el operador I mayúscula), como hemos hecho en 1.211.

La integral del primer miembro es bien conocida: se trata de la integral de la derivada de una función, dividida (dicha derivada) entre la función misma. Esa integral es igual al logaritmo de la función (o sea, que todo el primer miembro se reduce a Ly).

En cuanto al segundo miembro de la 1.211, la integral del mismo se puede descomponer en dos integrales: las integrales de dos fracciones. Una de esas fracciones por integrar tiene por numerador a equis minúscula (x) y por denominador común a be minúscula (b); la otra, tiene por numerador a a y por denominador+ la misma b. Esto puede expresarse como sigue, en la 1.212

\+ También se puede decir que, en cuanto el denominador común deeesas fracciones es una constante (b), el resultado es la suma de las integrales de x (o sea $x^2/2$) y de a (o sea, ax) dividida entre el denominador común b.

Este segundo miembro corresponde a una ecuación cuyo primer miembro es, según hemos señalado, Ly (logaritmo natural de y), con lo que se obtiene la 1.213.

Si en esta fórmula se toman los antilogaritmos del primero y del segundo miembros, la expresión no se altera.

El antilogaritmo del logaritmo de "y" es, por supuesto, "y" (puesto que se ejecutan con dicha literal dos operaciones contrarias, que anulan sus efectos). O sea, que "y" será el primer miembro de la ecuación resultante.

En cuanto al antilogaritmo del segundo miembro, éste se obtiene si se toma dicho miembro como exponente de la base de los logaritmos naturales. O sea, que el resultado es el número que se representa generalmente por la letra e, minúscula (base de dichos logaritmos), elevado al que era segundo miembro de nuestra expresión (1.213) de origen.

Toda la igualdad 1.213 se convierte, por tanto, en la 1.214.

En el segundo miembro figura e elevado a una fracción más C; o sea, que dicho miembro se puede descomponer en dos factores exponenciales. De ellos, el primero es e elevado a la fracción, y el segundo, e elevado a C. Si a e elevado a C lo representamos por Y', la expresión anterior puede escribirse como en la 1.215.

Esta forma integral de la curva correspondiente puede ser reconocida fácilmente por el estudiante, pues se trata de la curva normal.

En esta expresión existen: una variable (x) y dos parámetros (a y b) cuyos valores hay que determinar. Y' no nos interesa por el momento.

1.22 Parámetros por Medio de Momentos.

Para determinar el valor de los parámetros, recurriremos a los momentos.

Como se recordará, un momento estadístico se define como la media de las potencias de las desviaciones (o sea, como el coeiente que resulta de dividir la suma de las potencias de las desviaciones entre el efectivo de la distribución).

Cuando el momento lo es con respecto al origen, las desviaciones son los propios datos (que hemos decidido representar por x). La fórmula del momento (que representamos por nu o por v) de orden n (orden que representaremos agregando un subíndice n a la literal v que indica el momento) está dada por la expresión 1.22101.

Cuando la serie es de frecuencias, las potencias aparecen poderadas(o sea, en este caso, "multiplicadas") por la frecuencias (que hemos representado aquí, generalmente, por y). O sea, que la fórmula del enésimo momento con respecto al origen será, en el caso de dicha serie del frecuencias, el dado por la 1.22102.

Si, en vez de ser discontinua, es continua la serie de la que se trate, se determinarán las correspondientes modificaciones en la fórmula de los

13

momentos. En ella, la sumatoria se transforma en integral+

Según esto, la fórmula del enésimo momento, para una distribución continua como la que nos interesa, resulta ser la 1.22103.

Si en la expresión diferencial de la curva continua 1.117 quitamos denominadores (pasando b que está como denominador en el segundo al primer miembro, como factor, y pasando igualmente a "y" que figuraba como denominador del primer miembro al segundo, como factor), tendremos la 1.22104.

Si se parte de esta expresión, se puede obtener el enésimo momento de la distribución. Para ello, a ambos miembros se les deberá multiplicar por la enésima potencia de la variable independiente (x a la n). La multiplicación de ambos miembros de la ecuación 1.22104 por equis elevada a la ene produce la referencia 1.22105.

Para obtener el enésimo momento, se necesitará, además, integrar ambos miembros con respecto a x (o sea, que habrá que anteponer a ambos el operador ese alongada). Así se obtiene la 1.22106.

El integrando (o expresión afectada por el integrador) del segundo miembro, puede desarrollarse si se multiplica cada término de dentro del paréntesis por los que están fuera de él. Con ello, dicho segundo miembro se convierte en la expresión 1.22107.

+ Prácticamente, el operador sigma mayúscula se transforma en el operador ese alongada (o integrador con respecto a x) también representable por I mayúscula, y N se transforma en 1.

Este miembro puede transformarse si se aplica en la integración una regla ya conocida para su análoga (la sumación) y que es bien conocida en matemáticas como "ley distributiva". La sumatoria de una suma es igual a la suma de las sumatorias de los sumandos. En forma análoga, la integral de una suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos. De este modo, el segundo miembro se convierte en la referencia 1.22108.

En este segundo miembro se puede reconocer: como primer término, la integral de las potencias n+1 de la variable x, ponderadas por la función y, o sea: el momento de orden n+1 y, como segundo término, la integral de una constante (a) por el producto de ciertas variables (una de ellas potenciada) que se reduce a la constante (a) por la integral del producto. Este producto, a su vez, (por consideraciones análogas a las anteriores) no es sino el momento de orden n. Como el momento de orden (n+1) puede representarse por v_{n+1} y el de orden n por v_n, el segundo miembro de la expresión 1.22106 es igual a la suma de la referencia 1.22109.

En cuanto al primer miembro de la (1.22106), si sacamos a b fuera del integrador, tendremos la 1.22110.

Esta integral se puede obtener por el llamado "método de integración por partes"+

+ La integral de un producto (integral de equis a la n, por $D_x y$) es igual a: el primer factor (x a la n)/ por la integral del segundo (integral de $D_x y=y$) menos la integral del producto formado por: la derivada del primero (derivada de xn = nx^{n-1}) por la integral del segundo (integral de $D_x y = y$)

En el caso concreto, se tendrá, como primer miembro de la ecuación: 1.22111.

En este primer miembro, $x^n y$ tiende a desvanecerse. Por ello, todo el miembro se puede considerar reducido a b multiplicado por el segundo término (el término integral) de dentro del paréntesis.

Pero, la integral de dentro del paréntesis no es sino n veces la integral de las potencias de orden n-1 de x, ponderadas por y; o sea, n veces el momento de orden n-1. Por tanto, este miembro puede considerarse reducido a la 1.22112.

De acuerdo con esto, la expresión 1.2206 equivale a la 1.22113.

Si se deja a v_{n+1} en un miembro, se tiene la 1.22114.

Esta expresión genérica nos dice que, en esta curva típica, si (1) se multiplica por el parámetro "a" el enésimo momento, (2) se multiplica el momento inmediatamente anterior por "b" y por "n", y (3) se restadel primer resultado el segundo, se obtendrá el momento inmediato siguiente.

Una expresión como la que acabamos de anotar, permite que se resuelva uno de los dos problemas siguientes:

1. Conocidos los momentos de una distribución (las v's de la fórmula), determinar los parámetros (a y b) o,

2. Conocidos los parámetros (a y b) de un tipo de distribución, determinar los momentos (v's) de la distribución a la que corresponde.

Esos dos problemas son inverso el uno respecto del otro.

Mientras al primer problema interesa, fundamentalmente, al practicante de la estadística, el segundo es de utilidad primordial para el teórico de la misma. Esto no significa que el segundo problema no tenga interés práctico o que el primero carezca de interés teórico. Pero, de momento, como el estudiante de siencias políticas y sociales tiene que prepararse inicialmente más para ser un práctico que un teórico de la estadística, nos ocuparemos sólo del primer problema.

Si --por una parte-- tenemos una distribución y calculamos los momentos respecto al origen y --por otra-- tenemos la expresión genérica 1.2204, podemos determinar a qué curva específica corresponde, tan pronto como determinamos los valores de a y de b de la distribución empírica y los sustituimos en la expresión teórica genérica (1.2204).

Para calcular los parámetros a y b, debemos recordar que si tenemos dos incógnitas (los parámetros) necesitaremos dos ecuaciones simultáneas que las contengan. Para obtener esas dos ecuaciones simultáneas, lo que haremos lserá especificar la expresión genérica, dando a n diferentes valores. Esos valores conviene sean pequeños (0,1,2...) pues los primeros momentos de una distribución están menos sujetos a error que los momentos de orden superior y son más fáciles de calcular. Como necesitamos dos ecuaciones simultáneas, daremos a n, sucesica-

 17

mente sólo los dos valores 0 y 1. Así obtendremos las expresiones 1.2221 y 1.2222.

En la primera ecuación no nos interesa calcular el valor de v_{-1} pues todo el factor se reduce a cero, ya que en el producto figura cero como factor. La reducción de las dos ecuaciones a sus términos más simples nos da las referencias 1.2223 y 1.2224.

Al despejar al parámetro de la expresión (1.2217), se obtiene $a = -v_1/v_0$, pero, como v_0 es igual a uno+, se tiene la equivalencia 1.2231.

Si se considera que v_0 vale 1, la segunda ecuación se reduce a la 1.2232.

Al sustituir en esta ecuación el valor de a, se tiene la 1.2233 y, al despejar a b, se obtiene la 1.2234.

1.223 Fórmulas Básicas para la Interpolación de una Curva Normal.

Conocidas la expresión genérica (1.215) y las expresiones 1.2231 y 1.2234 que dan los valores de los parámetros de dicha expresión genérica en términos de los momentos, es posible interpolar una curva normal a una serie cuyos dos primeros momentos con respecto al origen (o sean v sub-índice 1 y

+ El momento de orden cero siempre es igual a la unidad, como puede comprobarse fácilmente si se recuerda que es la media aritmética de las potencias de orden cero, de las desviaciones.

18

v sub-índice 2) puedan calcularse aritméticamente, de acuerdo con procedimientos ya conocidos.

1.2231 Simplificación.- Si en vez de tomar los datos originales (x) se toman las desviaciones con respecto a la media aritmética (d), v_1 se convertirá en la media aritmética de esas desviaciones, y μ_2 (o mu sub-índice 2) no se modificará. Como la media aritmética de las desviaciones con respecto a la media aritmética es cero (Ref. 1.22311), la expresión se simplifica.

Si en vez de tomar esas desviaciones en unidades originarias (d) se toman en unidades sigmáticas (dividiéndolas entre sigma minúscula), la desviación cuadráticamedia), u_2 se reduce a la unidad (1.22312)

Como la y"' de 1.22312 corresponde al origen, conviene representarlam por Y_0 (Ref. 1.22313)

1.224. Procedimiento para Interpolar una Curva Normal.

Para interpolar una curva normal a una serie de frecuencias, se necesita:

1.2241.-Calcular el segundo momanto con respecto a la media aritmética (μ_2)

Para ello, habrá que:

1.22411.-Calcular la media aritmética ($\bar{x}$)

1.22412.-Restarla de cada dato, para obtener desviaciones (d)

1.22413.-Elevar al cuadrado las desviaciones,
ponderar los cuadrados por las frecuencias,
sumar los productos, y
dividir la suma entre el efectivo

(sigma)σ

1.2242,- Obtener el valor de Y_0

Para ello hay que hacer lo siguiente:

1.22421 (Numerador) Multiplíquese el efectivo de la distribución (N) por el intervalo de clase (i) (Ni)

1.22422 (Denominador) Obténgase la raíz cuadrada del producto de dos pi (2π) por u_2 ($\sqrt{2\pi u_2}$)

1.2243.- Sustituir u_2 y Y_0 en la fórmula genérica de la curva normal

1.2244.- Dar valores a delta minúscula (d)en dicha ecuación, para obtener las frecuencias teóricas.

20

2 EL SISTEMA ASIMETRICO.

El recorrido que hemos hecho por terreno parcialmente conocido, nos ha permitido ver cuál es el método que habrémos de seguir para obtener fórmulas que sirvan para la descripción estadística de series que ya no sean simétricas como lo es la curva normal, sino asimétricas. Esta obtención, abreviada, puesta en sus términos más simples, es la que nos proponemos alcanzar en seguida.

Para realizar un recorrido paralelo al que hemos hecho previamente, nuestro esfuerzo se deberá concentrar en:

1o.- Partir de la expresión de una curva discontínua apropiada para el caso,

2o.- Determinar la relación que existe entre un incremento unitario de la variable y la frecuencia media del intervalo unitario de dicha curva,

3o.- Determinar, en la expresión resultante, cuáles son los términos constantes y cuáles los variables, y representarlos en la forma más simple que sea posible.

4o.- Pasar de la expresión diferencial a la expresión integral de la curva correspondiente, y

5o.- Determinar la relación entre los parámetros de la expresión obtenida y los momentos de la distribución.

2.1 LA BINOMIAL ASIMETRICA.

Si en el caso anterior nuestro punto de partida estuvo en una binomial simétrica en la que "p" era igual a "1-p", en este caso, en que no nos interesa obtener una curva contínua simétrica sino un sistema de curvas continuas asimétricas, tomaremos como punto de partida una binomial también asimétrica (o sea, una en la que p es diferente de 1-p) (Ref. 2.11)

En esta fórmula, se puede suponer --para referencia concreta-- que M es el número de dados empleados en una jugada, y que S es el número de los que dieron un "seis" mientras M-S es el número de los que dieron una puntuación distinta de "seis".

2.11 La Pendiente de la Curva Asimétrica.

Si mediante esta fórmula se calcula el incremento de las frecuencias para una unidad de incremento de la variable, se calcula --también-- la frecuencia media del intervalo y se las relaciona, se podrá obtener, en el segundo miembro, una expresión fraccionaria, en cuyo numerador figurarán variables y constantes, y en cuyo denominador (a diferencia de lo que ocurría en el caso anterior, en que sólo figuraban constantes) figuran también variables y constantes. El desarrollo que conduce a este resultado es, en términos generales, el dado por las referencias 2.12 a 2.15.

22

Al dividir la (2.112) entre la (2.113), el factor combinatorio, la potencia S de p y la potencia M-S de (1-p) que son comunes a los segundos miembros de ambas expresiones, se reducen a la unidad, con lo cual se tiene la referencia 2.114.

Como puede verse, hemos agrupado los términos a modo de que en el numerador de la fracción del segundo miembro sea claramente visible que existe una serie de términos constantes, 1 y Mp(1-p) que, aunque unidos por diferente signo, también aparecen al principio en el numerador, así como que, en la parte final del numerador y en la final del denominador aparece un término variable (un término en S) afectado por dos coeficientes distintos (ya que en el numerador, los términos de dicho coeficiente, 1 y p(1-p) están unidos por el signo más y en el denominador los une el signo menos).

De acuerdo con lo anterior, si como en casos anteriores, designamos por x a la variable, y por a, be, c, a las constantes, podremos escribir (tras recordar, por otra parte, lo que hemos dicho anteriormente con respecto a delta mayúscula de f(S) sobre f(S+.5)), la expresión 2.1151.

En este caso, hemos igualado el segundo miembro de la expresión original a $D_x y$, sobre y, por razones análogas a las que nos movieron a hacerlo en el caso anterior. Según esto, la expresión (2.112) es la fórmula diferencial del sistema de curvas asimétricas que buscamos.

Esta expresión --como la del caso previo-- puede ser integrada. Sin embargo, antes de integrar vamos a transformar la expresión, a fin de que tan-

23

to ella misma como los resultados que de ella procedan sean más fáciles de manejar.

La transformación se puede lograr si, en lugar de utilizar los datos mismos(x), utilizamos las desviaciones con respecto a la media aritmética de la serie ($x-\bar{x} = d$). En este caso, los parámetros serán distintos. Podemos representarlos por a', b', c'. De acuerdo con esto, la expresión diferencial, cuando se utilizan desviaciones respecto a la media aritmética, será dada por la 2.1152.

Si, para simplificar aún más, la expresión resultante, en vez de tomar desviaciones respecto a la media, en unidades originarias (d) tomamos desviaciones con respecto a la media en unidades sigmáticas (delta minúscula), los parámetros también variarán. Si representamos el parámetro correspondiente de a' por alfa minúscula; por beta minúscula subíndice uno el correspondiente a b', la expresión resultante será la 2.114.

Esta expresión, por su parte, puede resultar más fácilmente integrable, si substituimos a delta minúscula por D - (B_0/B_1) como se ha hecho en la 2.1154.

Es fácil ver que, en el denominador del segundo miembro, al multiplicar beta minúscula subíndice 1 por beta cero sobre beta uno, se obtendrá beta cero, con signo negativo, que habrá que sumar a la beta cero de fuera del paréntesis, con la que se anula. Con esto, el denominador quedará reducido al producto de beta-uno por D (mayúscula).

24

De acuerdo con lo anterior, la expresión (2.1154) puede escribirse como en 2.1155, o bien como la 2.116. Esta es la fórmula diferencial del sistema de ecuaciones que estamos investigando.

2.2 LAS CURVAS ASIMETRICAS CONTINUAS.

2.21 Fórmula Integral del Sistema de Curvas Asimétricas.

Para obtener la forma integral del sistema, bastará con anteponer el operador propio de la integración (ese alargada o I mayúscula subíndice x, en el primer mimebro, y ese alargada o I mayúscula subíndice D, en el segundo) a los dos miembros de la ecuación. Sin embargo, como en el segundo miembro aparece un factor constante, el mismo puede quedar fuera del integrador que afectará, por tanto, a la suma de dentro del paréntesis, como en la referencia 2.211.

La integral del primer miembro es conocida: se trata de la derivada de una función, dividida entre la función, la cual es igual al logaritmo de la función (o sea, a Ly). En cuanto a la integral que aparece en el segundo miembro, se trata de la integral de una suma, que es igual a la integral de cada sumando sumada con la integral de todos y cada uno de los restantes (o sea, a la "suma de las integrales de los sumandos"); referencia 2.212.

La integral del primer término del segundo miembro es igual a D (variable de referencia del integrador); la del segundo término del segundo miembro es igual a A por el logaritmo de D, puesto que se trata de una constante por el recíproco de la función que --como se sabe-- al integrarse, produce el logaritmo natural. Según esto, la expresión se nos convierte en la 2.213.

En esta expresión es posible tomar antilogaritmos.

El antilogaritmo del logaritmo de "y" es "y", en el primer miembro.

En el segundo miembro, el sumando C se convierte --al tomar antilogaritmos-- en e (base de los logaritmos naturales) elevado a C, y este factor lo representamos por Y.

En el mismo segundo miembro, el otro sumando se convierte en otro factor. Al tomar antilogaritmos, 1 sobre beta-uno (que figura como factor en la expresión logarítmica) pasará a figurar como exponente de la antilogarítmica. Por su parte, los términos de dentro del paréntesis representarán, en la expresión antilogarítmica, factores en vez de sumandos: el primer factor estará constituido por e elevado a D (primer sumando de la logarítmica) y el segundo e elevado a A L(D) (segundo sumando de la logarítmica) que --a su vez-- se reduce a D elevado a la A. O sea, que al pasar de la forma logarítmica a la antilogarítmica, se obtiene la 2.214.

Esta expresión (2.214) es importante, pues se trata de la forma integral del sistema de curvas simétricas que estamos considerando.

En seguida haremos referencia a la forma de encontrar el parámetro Y

26

El Parámetro Y.

Antes de proceder a encontrar los valores de D y A en términos de los momentos, conviene determinar el valor de Y. Para ello, integraremos los dos miembros de la ecuación, entre cero e infinito. La integración, en el segundo miembro, puede hacerse dejando a Y fuera del integrador, por tratarsele como un factor constante que puede entrar y salir del integrando sin alterarse o alterar la expresión (Ref. 2.215).

Con el fin de poner de relieve la estructura esencial de la integral que figura en el segundo miembro, cambiaremos variable. Para ello, haremos a D igual a menos beta-uno por z. Cuando se cambia variable en una integración:

1o. Hay que sustituir en el integrando (o expresión afectada por el integrador) la antigua variable por la nueva.
Esto hace que, en nuestro caso: D sobre beta-uno
se convierta en menos beta-uno por z sobre beta-uno (=-z);
D elevada a la A sobre beta-uno, en
menos beta-uno por z, elevado (el producto) a la A sobre beta-uno.
Esto último, a su vez, es igual al producto de dos potencias:
menos beta-uno elevada a A sobre beta-uno, y
z a la A sobre beta-uno.

2o. Hay que multiplicar el integrando por la derivada de la antigua variable respecto de la nueva.
En nuestro caso, habrá que multiplicar por $D_z D$ qye es igual a

27

la derivada de menos beta uno por z (o sea, menos beta-uno).

3o.- Hay que cambiar el referente del integrador.
La integración, en nuestro caso, ya no se hará con respecto a D, sino con respecto a z, y

4o.-En caso necesario, habrá que cambiar los límites de la integración.
Para hacerlo, habrá que sustituir los límites antiguos en la expresión que da el equivalente de la nueva variable en términos de la antigua.
Como, en nuestro caso, z es igual a D sobre menos beta-uno,
(1) sis sustituimos por D el límite inferior, cero, obtendremos como nuevo límite interior, cero, y
(2) si sustituimos por D el límite superior, infinito, se obtendrá, también, infinito, como límite superior.

5o.-De acuerdo con lo dicho, la expresión se transforma en la siguiente (2.216)
Si sacamos fuera del integrador todos los factores constantes, tendremos la 2.217.

El factor integral del segundo miembro de la expresión 2.217 es muy característico y bien conocido.

Se trata de:

Una integral	(ese alargada o I mayúscula)
definida entre cero e infinito	(0, oo)
de un producto formado por	
un factor exponencial	(e elevado a la menos z)
y otro formado por una potencia	(A sobre beta-uno)
del simétrico del exponente	(z)
en la que la potencia	(-z)
de la exponencial	
es el simétrico	(signo menos)
de la base de la potencia	(z)
que forma el otro factor,	
refiriéndose la integración	
a la variable de la que se trata	(z, en la parte baja del integrador)

La función típica que acabamos de describir se conoce, en el cálculo integral, como la función gamma mayúscula del exponente de la variable (A sobre beta-uno, en el caso) adicionado, dicho exponente, de una unidad. O sea, que aquí, se trata de la función gamma mayúscula de (A sobre beta-uno, más uno).

De acuerdo con esto --sí, a más de todo, y para facilitar la escritura representamos por R a A sobre beta-uno-- toda la expresión previa se transforma en la que aparece como referencia 2.218.

Basta con despejar a Y de esta ecuación, para obtener la 2.219. Con estas dos expresiones genéricas, se tiene andada la mitad del camino.

 29

2.22 Parámetros del Sistema Asimétrico en Términos de Momentos.

Para especificar las expresiones genéricas (1.214) y (2.219) será necesario que, como en el caso previo, encontremos la equivalencia de los parámetros en términos de los momentos.

En el caso anterior, utilizamos momentos con respecto al origen pues nuestra expresión diferencial contenía x, o sea, las desviaciones de los datos con respecto al origen. Como en este caso estamos tratando con desviaciones sigmáticas, nuestros momentos tendrán que serlo con respecto a la media aritmética, en unidades sigmáticas. De ahí que aparezcan las gammas-minúsculas correspondientes.

La expresión general, reducida a los términos indispensables para la constitución de las tres ecuaciones necesarias y suficientes para el cálculo de los tres parámetros (alfa, beta-cero y beta-uno) aparece como referencia 2.220.

Al sustituir en 2.220 a n por cero, se obtiene la 2.2201; al sustituir en la misma ecuación inicial a n por uno, se obtiene la 2.2202, y al sustituirla por 2, la 2.2203.

En la 2.220, gamma-cero es igual a uno (por ser el momento sigmático de orden cero, que siempre es igual a la unidad). El segundo término se anula por contener un coeficiente cero. El tercero, se reduce a beta-uno por tener como factor un momento de orden cero (gamma-cero) igual a la unidad. El segun-

30

do miembro es nulo pues el primer momento es siempre igual a cero. El resultado aparece en la 2.2204.

En la 2.2202, el primer término se anula por ser nulo el primer momento sigmático (gamma-uno) que figura como factor. El segundo, se reduce a beta-cero, por valer uno el momento sigmático de orden cero (gamma-cero). El tercero se anula por contener un factor nulo (primer momento sigmático, gamma-uno). El segundo miembro se reduce a la unidad, pues el segundo momento sigmático es igual al segundo no-sigmático (u_2) entre el cuadrado de sigma (que, a su vez, también es igual a u_2), según aparece en la 2.2205.

En la 2.2203, el primer término se reduce a alfa por ser el segundo momento sigmático (factor suyo) igual a la unidad. El segundo se anula por tener como factor el primer momento sigmático (nulo). El tercero se reduce a 3 veces beta-uno por valer uno el segundo momento sigmático que aparece como tercer factor de dicho término. El segundo miembro no se altera (Ref. 2.2206)

Esos mismos resultados, simplificados, aparecen en las referencias 2.2207, 2.2208, 2.2209 que mcorresponden a cada una de las tres anteriores.

En las referencias 2.2210, se designan ciertos valores o combinaciones de valores que son frecuentes y que dificultarían la escritura y la lectura, mediante tres literales auxiliares: D.A, R. De ellas: D representa a las desviaciones sigmáticas disminuidas por el recíproco de beta-uno (2.2211); A representa a beta-uno menos su recíproco(2.2212) y R al recíproco del cuadrado de beta-uno (2.2213)

31

2.24 Procedimiento de Interpolación de las Curvas Asimétricas

De acuerdo con el desarrollo que nos conduce a las fórmulas 1.214 y 2.219, es posible delinear un procedimiento de interpolación para este tipo de curvas asimétricas. El mismo consistirá, fundamentalmente, en lo siguiente:

2.241 Procedimiento Detallado.

2.2411o.-Calcular el tercer momento con respecto a la media aritmética en unidades sigmáticas;para ello, habrá que:

2.24111 Calcular la media aritmética ($\bar{x}$)

2.24112 Restarla de cada dato,
para obtener desviaciones (d)

2.24113 Elevar al cuadrado las desviaciones obtenidas (d^2)
sumar los cuadrados,
dividir la suma entre el efectivo, y
extraer la raíz cuadrada del cociente,
para obtener la desviación cuadrática media (σ)

32

2.24114 Dividir cada diferencia o desviación entre la desviación cuadrática media, para obtener desviaciones sigmáticas (δ)

(delta minúscula)

2.24115 Elevar al cubo los cocientes (delta), sumar los cubos, dividir la suma entre el efectivo, para obtener el índice de asimetría (γ_3)

(gamma minúscula sub-índice tres)

O bien habrá que:

2.24111 b Calcular la media aritmética ($\bar{x}$)

2.24112 b Restarla de cada dato (d)

2.24113 b Obtener, a partir de las desviaciones, el segundo y el tercer moentos respecto a la media:

(segundo) elevando las desviaciones al cuadrado, sumando los cuadrados y dividiendo la suma entre el efectivo (μ_2)

(tercero) elevando las desviaciones al cubo
sumando los cubos y
dividiendo la suma
entre el efectivo (u_3)

2.24114 b Dividir el tercer momento
entre la raíz cuadrada
del segundo momento,
elevada al cubo,
para obtener (γ_3)
(gamma-tres)

2.2412 Dividir el tercer momento sigmático entre 2,
y cambiarle signo al resultado (b_1)
(beta-uno)

2.2413 Tomar el recíproco de beta-uno y
restarlo de delta minúscula para obtener las (D)

2.2414 Tomar beta-uno, cambiarle el signo
y sumarle el recíproco de beta-uno para tener (A)

2.2415 Tomar el recíproco de beta-uno y
dividirlo entre beta-uno,
para obtener el recíproco del cuadrado, o sea (R)

2.2416 Obtener el valor de $\bar{Y}$,

2.24161 Obteniendo la función gamma de R (en tablas)
2.24162 Elevando beta-uno a la R.
2.24163 Multiplicando los dos resultados anteriores
2.24164 Dividiendo el efectivo entre el producto así obtenido.

2.2417 Sustituir el valor de los diferentes parámetros en la fórmula genérica del sistema de curvas que nos ocupa

2.2418 Dar valores a delta, en dicha ecuación (ya especificada mediante la sustitución de los valores de los parámetros) con el fin de obtener los valores teóricos de las frecuencias.

2.242 Procedimiento Sintético.

El procedimiento que hemos detallado anteriormente, se puede sintetizar como sigue:

PRIMERO. Hay que calcular el tercer momento sigmático,

SEGUNDO. Sustituir su valor en la fórmula de beta-uno

TERCERO Sustituir el valor de beta -uno en las fórmulas de D,A,R.

CUARTO Sustituir los valores de beta-uno y R en la fórmula de Y.

QUINTO Sustituir los valores encontrados de los parámetros en la fórmula genérica del sistema de curvas asimétricas.

3 EL SUBSISTEMA DE CURVAS SIMETRICAS DE LA SISTEMATIZACION PEARSONIANA.

En el campo de la estadística, es bien conocida la relación que, por lo general, existe entre ciertas distribuciones discontinuas y determinadas distribuciones continuas, o sea, entre distribuciones que crecen por incrementos finitos y distribuciones que crecen por incrementos infinitamente pequeños o infinitesimales (y usamos estos últimos términos, a pesar de su general desprestigio, por conveniencias de contraste lingüístico). Ya en otro sitio hemos tenido ocasión de mostrar la forma en que la distribución binomial (discontinua) tiende a la normal (continua). En el caso presente, la relación se establece entre la distribución hipergeométrica (discontinua) y el sistema pearsoniano de curvas (continuas). Para nuestros propósitos presentes --con todo-- centraremos nuestra atención en un subsistema de la sistematización general de Pearson: el constituído por sus curvas simétricas. Ello, a no dudarlo, facilitará el enfoque.

3.1 LA CURVA HIPERGEOMETRICA.

La forma matemática de la distribución hipergeométrica se establece con base en el cálculo de probabilidades. Una buena forma de aproximarse a su expresión general por caminos empíricos consiste en tratar de resolver el sigüiente problema:

Se tienen <u>n</u> paquetes de barajas, con 52 cartas cada uno de ellos. Se trata de sacar una carta de cada paquete, pero, de tal modo que la carta extraída de cada uno de ellos sea diferente de la que se sacó (o de las que se sacaron) del paquete (o de los paquetes) previos. Se desea saber ¿cuál es la probabilidad que hay de no obtener espadas (o sea, de obtener cero espadas); de obtener una, dos, tres... ene espadas, de ene paquetes?

A fin de hacer inteligibles los desarrollos y, al mismo tiempo, con objeto de evitar presentaciones textuales muy extensas que harían fatigosa la lectura por lo reiterada (según ocurre en presentaciones textuales matemáticas) recurriremos a las siguientes convenciones:

Los paquetes de barajas los numeramos con romanos: I, II, III, IV. O sea, que I representa el primer paquete; II, al segundo, etcétera.

La aparición de una espada en un paquete la indicaremos con una "x" colocada debajo del número romano correspondiente. Así, una x colocada debajo de IV significa que en el cuarto paquete se obtuvo una espada.

La aparición de una carta que no sea espada la indicaremos mediante "o" colocado debajo del número romano correspondiente. Así, una o colocada debajo de II significa que en el segundo paquete se obtuvo una carta que no fue espada.

3.101 Caso de Un Paquete.

Caso-límite de la distribución hipergeométrica es el que se obtiene cuando se toma un solo paquete de cartas (referencia 3.101). Con un paquete de cartas, y de acuerdo con las condiciones del problema, es posible obtener: o bien

38

una carta que no sea espada, o bien una carta que sea espada.

Para determinar la probabilidad que hay de obtener una carta que no sea espada (referencia 3.1010) o sea, para determinar la probabilidad que corresponde al esquema en el que debajo de I aparece "o", será necesario dividir el total de cartas que no son espadas (39) entre el total de cartas del paquete, sean o no espadas (52): o sea, 39/52.

Para determinar la probabilidad que hay de obtener una carta que sea espada, con un solo paquete (referencia 3.1011), será indispensable dividir el total de cartas que son espadas (13) entre el total de cartas del paquete (52); o sea, 13/52.

3.102 Caso de Dos Paquetes.

Si son dos los paquetes de barajas (referencia 3.102), se pueden obtener: dos cartas que no sean espadas; una carta que sea espada y una que no lo sea, o dos cartas que sean espadas (referencias 3.1020, 3.1021, 3.1022).

3.1020 Probabilidad de No Obtener Espadas (O Espadas).

La posibilidad que hay de que del primer paquete se extraiga una carta que no sea espada es de 39 sobre 52 (como en el caso anterior). La posibilidad que habría de que sel segundo se extrajera una carta que no fuera espada sería también de 39 sobre 52 si esta probabilidad fuese independiente de la anterior. Sin embargo, esta posibilidad no es independiente de la anterior.

39

De acuerdo con las condiciones del problema, es necesario que la carta que se extraiga del segundo paquete <u>no sea igual</u> a la extraída del primero. Esta condición significa que una de la cartas del segundo paquete (una de las 52) es <u>como si no existiera</u>, en cuanto es igual a la extraída del primero(o sea que de las 52 del paquete, quedan efectivamente, 51). Por otra parte, en cuanto la carta extraída del primer paquete no fue espada, es como si de las 39 espadas del segundo paquete una <u>no existiera</u>, por ser igual a la extraída del primer paquete (o sea, que de las 39 que no son espadas sólo quedan, enforma efectiva, 38). De acuerdo con todo lo anterior, la probabilidad que hay de obtener del segundo paquete una carta que no sea espada se obtendrá si se divide el total de las cartas <u>efectivas</u> que no son espadas (38), entre el total <u>efectivo</u> de cartas (51) o sea , 38/51). Para obtener la probabilidad total, habrá que multiplicar entre sí las probabilidades parciales (39/52) X (38/51).

3.1021 Probabilidad de Obtener Una Espada.

Para obtener la probabilidad que hay de sacar una espada de dos paquetes de cartas, dentro de las condiciones estipuladas (referencia 3.1021), hay que comenzar por indicar que existen dos posibilidades. Esta espada o puede salir en el primer paquete o puede salir en el segundo.

En el primer caso, la probabilidad de obtener una espada del primer paquete es igual al total de espadas en el paquete (13), entre el total de cartas en el mismo (52); es decir, 13/52. Como en el caso previo, en cuanto las probabilidades del segundo paquete están condicionadas por la carta sacada del primero, de las 52 cartas el paquete, 1 queda anulada por ser igual a la obtenida

40

del primer paquete (de donde, el total es 51); pero, en este caso, la carta obtenida es espada, y del segundo paquete se obtienen no-espadas; por ello, la carta obtenida no afecta al número de las no-espadas que se pueden obtener del segundo paquete (ya que ninguna de éstas puede ser igual a la carta obtenida del primero). Es decir, que, para el segundo paquete, la probabilidad está dada por el cociente que resulta de dividir 39 (no espadas) entre 51 (cartas efectivas del paquete), o sea: 39/51. Como en el caso anterior, la probabilidad total estará dada por el producto de las probabilidades parciales (13/52) X (39/51).

En el segundo caso, la probabilidad de obtener del primer paquete una carta que no sea espada, es igual al total de las que no son espadas(39) entre el total de cartas (52): o sea, 39/52. En el segundo paquete, las cartas efectivas han llegado a ser sólo 51; sin embargo, el total posible de espadas obtenibles del paquete no ha dejado de ser 13, puesto que la carta obtenida en el otro paquete no era espada. En consecuencia, la probabilidad de obtener una espada del segundo paquete (aún dentro de las condiciones del problema) será igual al cociente de 13 (total de espadas) entre 51 (total de cartas efectivas, en el segundo paquete); o sea, 13/51. La probabilidad total estará dada por el producto de las probabilidades parciales.

Si comparamos la probabilidades totales de uno y otro esquema, veremos que los resultados son los mismos. Esto quiere decir que si la probabilidad total del esquema primero (I-x, II-o) es (13 x 39) sobre (52 x 51), y la del segundo (I-o, II-x) es esa misma (39 x 13) sobre (52 x 51), la probabilidad de que se den indistintamente uno u otro esquema (o sea, la probabilidad de obtener una espada <u>de cualquiera de los dos</u> paquetes) es igual a dos veces

41

la probabilidad que hay de obtenerla de cada uno de ellos en particular; o sea: 2 x (13/52) x (39/51)

3.1022 Probabilidad de Obtener Dos Espadas.

En el cálculo de la probabilidad de obtener dos espadas a partir de dos paquetes(referencia 3.1022), no existe --como en el caso de dos no-espadas obtenidas de dos paquetes-- sino un solo esquema posible (I-x, II-x). La probabilidad total de este esquema la obtendremos en forma parecida a las anteriores.

En efecto, la probabilidad de obtener una espada del primer paquete estará dada por el cociente que resulta de dividir el total de espadas en el paquete (13) entre el total de cartas en el paquete (52); o sea, 13/52. La probabilidad de obtener una espada del segundo paquete está condicionada por la carta obtenida del primero, pues de las 52 cartas originales, una queda anulada y, por otra parte, como la carta obtenida es una espada, ello quiere decir que de las 13 cartas posibles que son espadas, una queda anulada. Así, la probabilidad del segundo paquete se obtendrá de dividir 12 (espadas efectivas en el paquete) entre 51 (cartas efectivas en este segundo paquete), o sea, 12/51. La probabilidad total estará dada por el producto de las probabilidades parciales (13/52) x (12/51).

Como no hay sino un esquema de este tipo, la probabilidad de todos los esquemas posibles en los que se pueden obtener dos espadas de dos paquetes es esa misma probabilidad total. O sea, que aquí no se necesita ninguna multiplicación ulterior, a diferencia de lo que ocurrió para las probabilidades de una espada a partir de dos paquetes, en que hubo necesidad de multiplicar por dos.

42

3.103 Caso en que se Utilizan Tres Paquetes.

Cuando se tienen tres paquetes de cartas, se pueden obtener: cero espadas, una espada, dos espadas, tres espadas y cuatro espadas (referencias 3.1030, 3.1031, 3.1032, 3.1033).

Si se trata de cero espadas obtenibles a partir de tres paquetes (3.1030), se puede observar que sólo hay un esquema posible (I-o, II-o, III-o)

Si se trata de una espada obtenible a partir de tres paquetes (3.1031) se puede observar que la espada puede proceder del primero, del segundo o del tercer paquete. De ahí que la probabilidad total obtenida (13/52) X (39/51) X (38/50), haya de multiplicarse por 3 (número de esquemas posibles); o sea, que así se obtiene: 3 (13/52) X (39/51) X (38/50).

Cuando se trata de dos espadas obtenibles a partir de tres paquetes (3.1032) esas dos espadas pueden proceder o del primero y del segundo paquetes (I-x, II-x, III-o), o del primero y del tercero (I-x, II-o, III-x) o del segundo y del tercero (I-o, II-x, III-x).. Es decir, que hay tres esquemas posibles de obtención de dos espadas a partir de tres paquetes de cartas. Consiguientemente, la probabilidad total obtenida habrá de multiplicarse por 3 (como en el caso anterior) por ser también, en éste, tres los esquemas posibles a los que puede corresponder esa proabilidad total.

Finalmente, si se trata de obtener tres espadas a partir de tres paquetes (referencia 3.1034) se podrá observar que hay un solo esquema posible (I-x, II-x, III-x) y que, por tanto, la probabilidad total obtenida para el esquema no tiene que multiplicarse por ninguna cantidad.

43

3.104 Caso de Cuatro Paquetes.

El paso del problema representado por un solo paquete al que representaba manejar dos paquetes nos sirvió para mostrar la forma en que, en las probabilidaes correspondientes a cada paquete, repercutía la condición de que no se repitiera el tipo de las cartas (condición impuesta por el problema). El paso del problema que representa manejar dos paquetes al que representa utilizar tres paquetes nos sirvió para subrayar algo que ya estaba presente --de modo embrionario-- en el uso de dos paquetes: nos fijamos ahí, particularmente, en la posibilidad intermedia (de una espada obtenida a partir de dos paquetes). En efecto, fuera del caso en que se trata de obtener cero espadas o del caso en que hay que obtener n espadas a partir de n paquetes, hay no uno sino varios esquemas posibles, pues las n-m espadas que hay que obtener pueden proceder, indistintamente, de cualquiera de los paquetes. En tales casos, la proababilidad total que corresponde a cada esquema (y que es igual para todos los esquemas en los que interviene el mismo número de espadas) hay que multiplicarla por el número de esquemas posibles.

Es fácil comprender, a esta luz, que ese "número de esquemas posibles por el que habrá necesidad de multiplicar la probabilidad total" es el número de combinaciones de n (número de paquetes utilizados) en n-m (total de espadas que se pretende obtener de esos paquetes).

Con el fin de manejar conjuntamente todos esos elementos, y de poner las bases para su generalización, consideraremos --en forma final-- el problema consistente en obtener o, 1, 2, 3, 4 espadas a partir de 4 paquetes, dentro de las condiciones especificadas al principio (o sea, que una vez sacada una carta de un paquete, debe eliminarse del siguiente antes de sacar de éste cualquier carta o, en caso de ser varios los paquetes, que "toda carta sacada de los paquetes anteriores se debe eliminar de los otros antes de sacar la carta correspondiente").

Hacia la obtención de la fórmula general de la hipergeométrica a partir del uso de cuatro paquetes de cartas. Si se usan cuatro paquetes, la probabilidad de obtener cero espadas (o sea, de no obtener espadas en ninguno de los paquetes) quedaría representada por el esquema formado por las referencias 3.1040.

Para determinar la probabilidad total de este esquema, comenzaremos por determinar las probabilidades parciales correspondientes a cada uno de los paquetes de barajas. Para ello, utilizaremos el concepto según el cual la probabilidad de que ocurra un acontecimiento (a) de dos complementarios (a y b) equivale a la relación matemática de a con respecto a su suma (a+b). O sea, usaremos la sinonimia entre "probabilidad" y "frecuencia relativa". La "frecuencia relativa" es --a su vez-- el cociente que se obtiene de dividir la frecuencia absoluta entre el efectivo, o frecuencia total.

Según esto, las probabilidades por paquete se obtendrán como sigue:

Como de 52 cartas, 38 no son espadas, la probabilidad de obtener una espada del primer paquete es de 38 sobre 52.

De las 51 cartas restantes (pues una queda invalidada por la condición no repititiva del problema) 37 no son espadas; o sea, que la probabilidad del segundo paquete es 37 sobre 51.

De 50 restantes (dos no-espadas invalidadas por la condición) 36 no son espadas (pues dos "no-espadas" han sido invalidadas); o sea, que la probabilidad es de 36 sobre 50.

De 49 restantes, 35 son "no-espadas" (pues tres no-espadas quedaron invalidadas), lo cual hace que la probabilidad de obtener una carta que no sea espada en el cuarto paquete sea de 35 sobre 49.

Como la probabilidad total es igual al producto de las probabilidades parciales, este esquema de distribución de las no-espadas tiene por probabilidad total la de la referencia final de 3.1040.

3.1041. Probabilidad de Obtener Una Espada.

La probabilidad de obtener una espada, de cuatro paquetes de cartas, está dada en la referencia 3.1041. En efecto, las probabilidades por paquete se establecieron con base en las siguientes consideraciones:

De 52 cartas se pueden obtener 13 espadas.

De las 51 restantes (12 de ellas espadas, pues la decimotercera o la quincuagésimosegunda ya salió en el primer paquete) pueden obtenerse 39 no espadas.

De las 50 restantes (12 espadas y 38 no-espadas, por haber salido la

46

39a. y la 51a. en el segundo paquete) se pueden obtener 38 no-espadas.

De las 49 restantes (12 espadas y 37 no-espadas por haber salido en los paquetes segundo y tercero la 39a. y la 52a. y la 38a. y 50a.) se pueden obtener 37 no-espadas.

Esto permite escribir las referencias 3.10411 a 3.10414.

Si se examina la probabilidad total (formada por el producto de las probabilidades parciales así obtenidas) se puede observar que su denominador (o sea el producto de los denominadores de las probabilidades parciales) es el mismo en todos los casos (52 x 51 x 50 x 49 para cuatro paquetes) Referencia 3.10415.

En cuanto a los numeradores, se puede observar que, en la probabilidad total figuran en ellos los mismos valores (13, 39, 39, 37). Como un producto no se altera cuando se invierte el orden de los factores, todas esas probabilidades específicas se pueden subsumir en una sola expresión genérica: la dada por la referencia 3.10415.

Como la expresión de la referencia 3.10415 se presenta 4 veces (o sea, el resultado de las combinaciones de cuatro en uno) la probabilidad de obtener una espada de cuatro paquetes de cartas, en las condiciones enunciadas en el problema, será dada por la expresión 3.10416

Fuera de lo ya explicado, en la expresión anterior separamos el cociente 13/52 del resto porque queremos destacar la forma en que las espadas

47

contribuyen al total --por una parte-- y la contribución que a la probabilidad total brindan las no-espadas. En lo que sigue, seguiremos contrastando esas dos contribuciones distintas a la probabilidad total.

3.1042 Probabilidad de Obtener de Dos Espadas en Adelante.

La probabilidad de obtener dos espadas de los cuatro paquetes está consignada en la referencia de orden 3.1042. En ellas aparecen: los esquemas posibles (del 3.10421 al 3.10426), su número (3.10427) y la probabilidad total de obtener dos espadas (3.10428)

3.105. Generalizaciones.

Representemos por N el número total de cartas que no son espadas en cada paquete, y por T el total de las cartas (espadas y no-espadas) que contiene dicho paquete. En el caso de las cero espadas obtenidas de cuatro paquetes (3.1040), el primer numerador, 39, lo podremos representar, entonces, por N; el segundo numerador por dicha literal menos 1 (37 = 38 - 1 = N - 1); el tercero por dicho número menos 2 (36 = 38 - 2 = N - 2), y el cuarto, por dicha literal menos 3 (N - 3).

En forma análoga, en los denominadores figuran: el total de cartas (que representaremos por T); el total de cartas menos 1 (T - 1); el total de cartas menos 2 (T - 2); el total de cartas menos 3 (T - 3).

La probabilidad total de no obtener espadas (o mejor, de obtener no-espadas) en los cuatro paquetes, la podremos representar por el producto de N (N-1) (N-2) (N-3), dividido entre el de T (T-1) (T-2)(T-3).

Un esquema de ese tipo puede aparecer cuatro veces (las combinaciones de 4 paquetes tomados de 0 en 0, o de 4 espadas posibles, una por paquete, tomadas de 0 en 0, o sean cero espadas obtenidas realmente). En este caso, no hay sino una combinación posible.

La probabilidad de obtener cero espadas con cuatro paquetes de cartas quedará dada por la probabilidad total correspondiente a dicho esquema (o sea el cociente mencionado al principio) multiplicado por el número de combinaciones que pueden producir dicho esquema (1, que es el valor de 4 cosas tomadas de 0 en 0).

Si representamos por P el número de paquetes y por S el número de espadas obtenidas de los cuatro paquetes, obtendremos la fórmula combinatoria $\binom{P}{S}$ que da, en forma simbólica, las posibilidades que hay de obtener S espadas por P paquetes.

Un desarrollo semejante al anterior será el que sigamos para 1,2,3 y 4 espadas.

Si E representa el total de espadas por paquete, N sigue representando el número de cartas que no son espadas, por paquete, y T el total de cartas en cada paquete, se obtiene la fórmula de la referencia 3.1051. Si hay alguna duda con respecto a la formación de cada numerador y de cada denominador de la expresión, recuérdese que, para el ejemplo concreto, E representa 13, N representa a 39 y T a 52. Obsérves, de paso, que 13+39 = 52, o bien que, en términos simbólicos, E + N = T (como es lógico).

Pero, el esquema con el que hemos trabajado (referencias 3.1041) no es la única manera posible de obtener una espada, ya que esa espada única para los cuatro paquetes puede aparecer en el primer paquete, en el segundo, en el tercero o en el cuarto, según las posibilidades esquematizadas por las referencias 3,10412, 3.10413, 3.10414. O sea, que hay cuatro esquemas o combinaciones posibles que equivalen a las combinaciones de las cuatro espadas obtenibles de los cuatro paquetes tomados de uno en uno (ya que una es la espada que aparece realmente en cada conjunto). Para mostrar claramente que la probabilidad de una espada puede obtenerse multiplicando las combinaciones de 4 en 1 (igual a 4) por la probabilidad total recientemente obtenida, ya señalamos, en particular, las probabilidades totales de estos cuatro esquemas (parte final de las referencias 3.10411 a 3.10414)

Mediante la sustitución de los valores numéricos por las literales representativas, hemos obtenido la probabilidad de sacar dos espadas mediante cuatro paquetes de cartas, dentro de las condiciones especificadas. En la referencia 3.1052, se pueden reconocer: el factor combinatorio, que indica el número de esquemas posibles; un factor fraccionario que permite reconocer la contribución de las espadas a la probabilidad total, y otro factor --también fraccionario-- que representa la contribución de las cartas que no son espadas a esa misma probabilidad total. En las fórmulas siguientes (referencias 3.1053 y 3.1054) se dan las probabilidades de obtener 3 y 4 espadas con 4 paquetes.

3.106. Obtención de una Fórmula General (independiente del número de paquetes)

Para obtener la fórmula general, partiremos de las fórmulas establecidas cuando usamos cuatro paquetes. En ellas, podemos observar que el denominador de la fracción es siempre el producto de cuatro factores que decrecen de unidad en unidad a partir de T (T, T-1, T-2, T-3), siendo el último factor (T-3) el resultado que se obtiene de restar de T (total de cartas en un paquete) 3, en este caso en que se ha trabajado con 4 paquetes. O sea, que en general, el último factor se obtiene de restar de T, el total de cartas, el número de paquetes menos uno (P-1). O sea, que el denominador puede representarse, en general, por:

$$T(T-1)(T-2)\ldots(T-[P-1])$$

O, si se ejecutan las operaciones en el último paréntesis, el denominador puede representarse por:

$$T(T-1)(T-2)\ldots(T-P+1)$$

Al numerador contribuyen dos productos de origen distinto:

1o.-El producto de los términos que provienen de las espadas que se han obtenido, y

2o.-El producto de los términos procedentes de las cartas que no son espadas.

51

Con respecto al producto que originan las espadas:

1.-No aparece cuando no hay espadas;
está formado por un solo factor cuando hay una sola,
por dos, si son dos las espadas; por tres, si son tres, etc.

2.-Sus factores decrecen de unidad en unidad a partir de E
(total de espadas), y

3.-Dichos factores dejan de aparecer cuando
el sustraendo es igual al número de espadas obtenidas menos 1
(el substraendo es cero cuando las espadas son 1; 1 cuando son 2;
2 cuando son 3...)

O sea, que a este primer producto constitutivo del numerador se le puede representar por:

$$E(E-1)(E-2)\ldots(E - [S-1])$$

O, si se ejecuta la operación del último paréntesis, por:

$$E(E-1)(E-2)\ldots(E - S + 1)$$

Con respecto al segundo producto, se puede observar que al mismo lo forman:

52

1o.-Una serie de factores decrecientes de unidad en unidad, a partir de N (total de las cartas que no son espadas) y

2o.-Que termina cuando el sustraendo de N es igual al número de espadas obtenidas menos 1.
O sea, que el sustraendo es 3 cuando de las cuatro cartas sacadas de los paquetes ninguna es espada;
es 2 cuando de las cuatro sacadas, una es espada (tres no-espadas);
es 1 cuando de las cuatro, dos son espadas(y dos no lo son)
es 0 cuando de las cuatro, tres son espadas(y una no lo es)

O sea, que ese segundo factor constitutivo del numerador se puede representar por una serie de factores cuyo minuendo sea N y cuyo sustraendo debe ser el número de no-espadas menos 1:

$$N(N-1)(N-2)\ldots(N-[P-S-1])$$

En esta expresión, P-S equivale al total de cartas sacadas o paquetes de los que se sacan (P), menos las espadas que salieron (SO, o sea, el total de cartas obtenidas que no fueron espadas.

De acuerdo con todo lo anterior, la expresión general para la probabilidad total de obtener un número S de espadas con P paquetes, cada uno de los cuales tenga un total de T cartas de las cuales E sean espadas y N no lo sean, estará dada por la referencia 3.1061, en la que se han ejecutado las operaciones indicadas dentro del último paréntesis del numerador.

53

3.1061 Una expresión más compacta de la probabilidad correspondiente a una distribución hipergeométrica será la que obtengamos en seguida. En la expresión de la referencia 3.10611, el primer factor

E(E-1)...(E-S+1)

equivale a tener:

1. Todos los factores decrecientes de unidad en unidad, desde E hasta 1,

2. Menos todos los factores comprendidos entre (E-S+1) -1 = E-S que es el que subseguiría al último) y 1.

Pero,

1. Decir "todos los factores decrecientes de unidad en unidad desde E hasta 1" equivale a tener el "factorial de E", y

2. Agregar "menos los factores comprendidos de (E-S) hasta 1" vale tanto como decir: "dividido entre el factorial de (E-S)"

En resumen, que este primer factor de la expresión 3.1062 equivale al factorial de E, entre el factorial de E-S (Ref. 3.1063 b)

El segundo factor de la expresión 3.1062 (N(N-1)...(N-P+S+1), por ...

54

consideraciones análogas, resulta igual al cociente que resulta de dividir el factorial de N entre el factorial de $[(N-P+S+1) - 1]$ = factorial de $(N-P+S)$. Es decir, que el equivalente de este segundo factor del numerador de la referencia 3.1062 estará dado por la referencia 3.1064

En cuanto al denominador de la referencia 3.1062, se puede escribir su equivalente en forma anpaloga, según se ha hecho en la referencia 3.1065.

En la referencia 3.1063 a se ha consignado también la forma en que puede escribirse, paralelamente a las espresiones anteriores el factor combinatorio inicial de la 3.1062

La substitución de los equivalentes de los diferentes mfactores en la expresión original (3.1062) que indica cuál es la probabilidad total de una distribución hipergeométrica, nos da una serie de factores fraccionarios, de los cuales, el último se explica gracias a la referencia 3.1066 pues el factor $T(T-1)\ldots(T-P+1)$ figura en la expresión originaria (3.1062) e n e l d e n o m i n a d o r.

En esta expresión (3.1067) podemos hacer un reagrupamiento. Asociaremos

1. el producto de los numeradores de las dos fracciones centrales $(E!N!)$ con el denominador de la última fracción $(T!)$, y

2. el producto de los denominadores de las dos centrales $(E-S)!$ y $(N-P+S)!$ con el numerador de la última fracción $(T-P)!$

55

Así obtendremos la expresión 3.1068.

Pero, como T es el total de cartas, este total es igual a E+N (o sea la suma del total de las espadas y de las que no son espadas) con lo que la expresión anterior se convierte en la de la referencia 3.1069.

Si se recuerda que cuando se divide el factorial de una suma (por ejemplo, el factorial de A) entre el producto de los factoriales de dos sumandos que la formen (entre el producto de los factoriales de B y de A-B, por ejemplo), se obtienen las combinaciones de A tomada de B en B, o sea el factor combinatorio $\binom{A}{B}$.

Se podrá observar que esto es lo que ocurre con los tres factores de la expresión 3.1069.

Para la primera fracción esto es obvio, pues de ahí se partió y ahí se vuelve: la fracción es el factorial de una suma, P (que es igual a (P-S) +S) entre el producto de los factoriales de los sumandos (entre el producto del factorial de P-S y el factorial de S). Por lo mismo, es igual a la combinatoria de P en S, según indica la referencia 3.10691.

Si se considera que la sgunda fracción es el recíproco de un quebrado cuyo numerador es el factorial de una suma (E+N) y el denominador el producto de los factoriales de los sumandos (o sea, de los factoriales de E y de N), se justificará el que, de acuerdo con la expresión 3.10692, se escriba como su equivalente el recíproco de la combinatoria de E-N en E.

Con respecto al tercer factor de la expresión 3.1069, como T = E+N, se puede escribir en él, en el numerador, en vez de T-P, E+N-P, conforme a la referencia.

Como se puede ver fácilmente, E+N-P= (E-S)+(N-P+S). O sea, que el factorial del numerador lo es de la suma de los elementos que figuran factorializados en el denominador; o bien, que el tercer factor de la expresión 3.1069 se puede sustituir por la combinatoria de E+N-P en E-S, como lo expresa la referencia 3.10693.

De este modo, al sustituir los equivalentes dados en las referencias 3.10691, 3.10692 y 3.10683, se obtiene como expresión de la probabilidad total de una distribución hipergeométrica, la consignada --en diferentes formas-- en las referencias de la 3.10694 a 3.10696.

En estas expresiones, los símbolos han representado, originalmente:

P-Paquetes,
S-Espadas por tirada,
E-Espadas por paquete,
N-Cartas que no son espadas, por paquete.

Con fines de memorización de la última expresión, se puede observar que si se suman entre sí los elemtos superiores de las dos combinatorias del numerador y si se hace lo mismo con los elementos inferiores de dichas combinatorias, se obtienen --respectivamente-- el elemento superior y el elemento inferior de la combinatoria del denominador.

57

3.11 La Pendiente de la Hipergeométrica.

3.111 Las Frecuencias Extremas.

Comenzaremos por representar por y_x la probabilidad que hay de obtener S espadas. La probabilidad correspondiente quedará dada al aplicar la fórmula de la hipergeométrica, como lo indica la referencia 3.1111.

La probabilidad de obtener S+1 espadas en vez de S espadas, la representaremos por y_{x+1} y su valor quedará dado por la referencia 3.1112.

Al construir esta última fórmula, debe recordarse que --como se dijo anteriormente-- en el caso de la hipergeométrica, la suma de los elementos superiores de los factores combinatorios del numerador debe ser igual al elemento superior de la combinatoria del denominador, y la suma de los elementos inferiores de los factores combinatorios del numerador debe ser igual al elemento inferior del coeficiente combinatorio del denominador.

Vamos a buscar --en seguida-- el equivalente de y_{x+1} en términos de y_x. Para ello, recurriremos a las propiedades de las combinatorias.

Existe una propiedad de las combinatorias según la cual, si al elemento inferior de un coeficiente combinatorio se le disminuye una unidad, el resultado no se altera cuando se le multiplica por el cociente que resulta de dividir la diferencia de los nuevos elementos entre el antiguo elemento inferior. Como para pasar de y_{x+1} a y_x es necesario que en el primer factor combinatorio del numerador se disminuya una unidad al elemento inferior, la propiedad mencionada es aplicable, de acuerdo con lo asentado en la referencia 3.11121.

En el caso del segundo factor combinatorio de la 3.1112, hay que agregar una unidad al elemento inferior E-S-1 para tener el factor combinatorio correspondiente de la 3.1111. De acuerdo con otra propiedad de los coeficientes combinatorios, si al elemento inferior de uno de ellos se le agrega una unidad, el resultado no se alterará siempre y cuando se multiplique por el cociente que resulta de dividir el nuevo elemento inferior entre la diferencia de los antiguos elementos superior e inferior Es así como puede asentarse la expresión de la referencia 3.11122.

Si se sustituyen los resultados anteriores en la 3.1112, se obtiene la equivalencia de y_{x+1} en términos de y_x (pie del desarrollo de 3.11122)

3.112 El Incremento.

Obtenidos los valores de y_{x+1} y de y_x, determinaremos el incremento de uno a otro, que representaremos por "delta mayúscula índice y" (y). Para ello, restaremos del valor de y_{x+1} el de y_x. Con esto obtendremos el resultado 3.112.

Al sacar como factor común a y_x, se obtiene el valor del incremento y, en términos de y_x.

3.113 Frecuencia Intermedia.

Para obtener el valor de $y_{x+\frac{1}{2}}$ o $y_{x+.5}$ que ha de constituir el denomi-

59

nador de la pendiente, tendremos que sumar los valores de y_x y de y_{x+1} (dados por 3.1111 y 3.11122 y tomar la mitad. El resultado se consigna en la referencia 3,113.

3.114 La Pendiente.

Si se divide el incremento (Δy) entre la frecuencia intermedia ($y_{x+.5}$) se obtendrá la expresión 3.114.

Como puede observarse, para establecer la relación en las expresiones originarias que llegaron a formar numerador y denominador: se redujeron, dentro de los corchets, los enteros con las fracciones, quedanco como denominador común de todas las expresiones: (S+1)(N-P+S+1). Como dicho denominador aparece tanto en la expresión numeradora como en la denominadora, acaba por reducirse a la unidad. Lo mismo ocurre con y_x en la expresión 3.1141 puesto que figura como factor del numerador y del denominador.

Por otra parte el .5 (o $\frac{1}{2}$) que equivale a un denominador 2, en el denominador, puede pasar como factor 2 al numerador, con lo cual se tiene la expresión 3.1142.

Si se calculan los productos indicados, se obtiene la expresión 3.1143.

Al eliminar términos semejantes iguales y de distinto signo (-PS y SP, más S^2 y menos S^2) en el numerador y agrupar todos los términos que contienen S en el numerador --por una parte-- y en el denominador--por otra-- para sacar esta literal como factor común, se obtiene la expresión 3.1144.

60

Al sustituir E+N por su valor T, se obtiene la 3.1145.

La división de todo el numerador entre 2(T+2) equivale a la reducción del factor 2 a la unidad y a la división entre (T+2), lo cual da, para el numerador, la expresión 3.1146.

3.115 Simplificación.

3.1151 Numerador. Si en esa expresión hacemos $S = x - \frac{1}{2}$. obtendremos la 3.1151. Si agregamos una unidad, obtendremos la referencia siguiente en la que figuran -N y +T. Pero T-N es igual a E. Si se saca como factor común a P y después a (E+1) se obtendrán las expresiones siguientes.

En la última de esas expresiones, se puede observar que existe un término en x, y que todo lo restante $[(P+1)(E+1)]/(T+2)$ todo menos $\frac{1}{2}$, se puede considerar como un término independiente de x y que, por lo mismo, puede representarse por una literal de las que se usan comúnmente para las constantes (a, por ejemplo).

De acuerdo con todo lo anterior, el numerador de la pendiente de la hipergeométrica puede representarse por: $x + a$.

3.1152 Denominador. Con respecto al denominador de la expresión originaria. transcrito con un principio de agrupación (según las potencias decrecientes de S), si se sustituye S por $x-\frac{1}{2}$, como en el caso anterior, se tienen las transformaciones recogidas en la referencia 3.1152.

De los desarrollos anteriores, se recogen términos en x^2, términos en x y términos independientes de x, como puede verse en la referencia 3.11522.

De acuerdo con todo lo anterior, se pone de manifiesto que el denominador puede expresarse como un polinomio de segundo grado en x; o sea, que si designamos por b_2, b_1 y b_0 los coeficientes de las segundas, primeras y nulas potencias de x, el denominador puede quedar representado por $b_0+b_1x+b_2x^2$

3.1153 La Pendiente. Si en la expresión de la pendiente se sustituyen estos valores (Numerador igual a x+a y denominador igual a $b_0+b_1x+b_2x^2$), toda la serie anterior de igualdades desemboca en la referencia 3.1153.

3.1154 Forma Diferencial del Sistema de Pearson.

Como el primer miembro de la ecuación puede representarse por el recíproco de y multiplicado por la derivada de y en x, puede considerarse como final la referencia que hemos designado como 3.110, que, en otra forma expresa:

$$\frac{1}{y} D_x y = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

Esta expresión debe de considerarse como el punto de partida para el establecimiento detallado del sistema pearsoniano de curvas de frecuencia.

62

3.12 P a r á m e t r o s y M o m e n t o s d e l a D i s t r i b u c i ó n.

3.121 Relación Genérica.

Comenzaremos por dar a la expresión la forma transcrita en la referencia 3.1211. Al pasar la "y" que figuraba como denominador en el primer miembro, en calidad de factor del segundo miembro, y pasar el que era denominador del segundo (el trinomio) como factor del primer miembro, se obtuvo esa expresión.

Si se multiplican ambos miembros por equis elevada a la enésima potencia (x^n), se obtiene la 3.1212.

Si se integran ambos miembros de la ecuación, ésta no se altera como lo muestra la 3.1213. En seguida nos ocuparemos, en forma sucesiva, de la integración del primero y de la del segundo miembro de esa ecuación.

Integración del primer miembro.- La integral del primer miembro se puede obtener mediante integración por partes. Hay que considerar:

$x^n(b_0 + b_1x + b_2x^2)$ como la primera parte (u)

y a Dy (derivada de y) como la segunda parte (Dv)

De acuerdo con la fórmula para la integración por partes:

$I(uDv) = uv - I\ vDu$

O sea, que habrá que multiplicar u (la primera parte) por v (integral de la segunda parte,Dv) y restarle al producto la integral de otro producto (el de la segunda parte integrada, v, por la derivada de la primera parte, o sea Du).

En el caso concreto, hay que restar dos resultados: el producto de la primera parte $x^n(b_0 + b_1x + b_2x^2)$ por y (integral de la segunda parte, Dy), y la integral de la segunda parte integrada (y) por la derivada de la primera parte, o sea la derivada de $x^n(b_o + b_1x + b_2x^2)$. Es así como del primer miembro se sacan las igualdades de la referencia 3.12131.

En el sustraendo de la expresión, se ha multiplicado la x^n de fuera del paréntesis por todos y cada uno de los términos de dentro del mismo, antes de tomar la derivda.

Para obtener las derivadas de los términos resultantes de esta multiplicación, en cuanto se trata de productos en los que figuran potencias de la variable, será necesario multiplicar cada exponente por el coeficiente, y por la variable elevada al exponente disminuido en una unidad (según regla bien conocida).

Pero, si al final de la curva el primer término (el no sujeto a integración) se desvanece, el primer término de la expresión quedará reducido a lo consignado en la referencia 3,121314.

Al multiplicar por la y de fuera del paréntesis cada uno de los términos de dentro del mismo se obtiene la 3.121315.

Como se trata del integral de una suma, se puede transformar esa integral en una suma de integrales, como la contenida en la 3.121316.

En cada uno de estos términos, hay factores constantes que pueden salir del integrador sin alterarse ni alterar la expresión. (Se trata de nb_0, $(n+1)b_1$, $(n+2)b_2$

Una vez que se sacan del integrador esos factores constantes, quedan afectadas por él expresiones de la forma:

$$x^{n-1}y, \qquad x^{n}y\ , \qquad x^{n+1}y$$

Estas expresiones representan las potencias de los valores de la distribución, ponderadas por sus frecuencias. Las integrales de estas expresiones, a su vez, representan "sumas" de potencias o sea, "momentos".

De este modo, en la 3.121316, en vez de esos factores integrales de los tres términos, se pueden escribir los momentos de orden n-1, de orden n, y de orden n+1, que representaremos por mus minúsculas griegas, afectadas de los subíndices correspondientes. De este modo, todo el primer término de la ecuación originaria se reduce a la referencia antes mendionada.

Integración del segundo miembro.- Con respecto al segundo miembro de la ecuación (referencia 3.12132), se puede realizar, en primer lugar, la multiplicación de los factores de fuera del paréntesis por los términos del factor entre paréntesis.

Pero, la integral de la suma es igual a la suma de las integrales de los sumandos (segundo miembro de la referencia)

En estos términos integrales del segundo miembro de la ecuación, se puede reconocer, asímismo, el esquema clásico de los momentos de una distribución. De ahí que los dos términos anteriores se puedan reemplazar por los momentos correspondientes, representados por mus minúsculas (tercera parte de la cadena de igualdades)

La restitución de los valores obtenidos a la ecuación, nospermiete escribir la 3.1214 que es una fórmula general que rige las relaciones que hay entre los parámetros de la pendiente del sistema de Pearson y los momentos de la distribución.

El paso del término en u'_n al primer miembro (con signo contrario) y el cambio ulterior de todos los signos de los términos de la ecuación por sus contrarios, produce la referencia 3.1215. A ésta se la puede considerar

66

como expresión general definitiva de las relaciones entre los parámetros del sistema pearsoniano y los momentos de la distribución.

3.122 Valor de los Parámetros de la Expresión de Pearson en Términos de los Momentos.

Para encontrar el valor de los parámetros del sistema de Pearson en términos de los momentos:

Primero. Daremos a la n de la expresión 3.1215, en forma sucesiva, los valores cero, uno, dos, tres, etcêtera.

Segundo: Formaremos, con la serie de ecuaciones obtenidas (referencia 3.1221) un sistema que tendrá tantas ecuaciones como incógnitas (parámetros b).

Tercero: Transformaremos las expresiones a fin de tener momentos no con respecto a una media arbitraria sino con respecto a la media arimética (no mus primas sino mus)

Cuarto: Resolveremos el sistema resultante.

Los momentos que fguran en el sistema de ecuaciones dado por la referencia 3.1221, son momentos con respecto a la media arbitraria (mus primas). Si esa media arbitraria coincide con la media aritmética, los momentos lo serán con respecto a la media aritmética (mus) y, en consecuencia, el primero de ellos, de acuerdo con una propiedad bien conocida, se anulará (o sea que $u_1' = 0$ si se toma respecto de la media aritmética) anulando con ello todos

67

los términos de las ecuaciones anteriores en que aparezca. Por su parte, el momento de orden cero --según es sabido-- es igual al. Según esto, el sistema de ecuaciones de la referencia 3.1221 se transforma en el sistema de la referencia 3.12222.

Si, además, introducimos la modificación consistente en considerar los momentos con respecto a la media aritmética, pero no en unidades originarias (como hasta ahora) sino en unidades "sigmáticas", los momentos no sigmáticos se transformarán en momentos sigmáticos (las mus en gammas) y se tendrán así las ecuaciones de la referencia 3.1223.

Puesto que, en forma inmediata, lo que nos proponemos es examinar más de cerca sólo el sub-sistema de curvas simétricas, tendremos que considerar el caso en que la asimetría es nula, o sea aquel en que la medida beta índice uno de Pearson (o nuestra gamma minúscula sub-índice tres) vale cero. Esto introduce en el sistema las transformaciones de la referencia 3.1223, obteniéndose en último término los resultados de la 3.12232

De la referencia 3.1225 en que se despejan los valores de los parámetros tal y como aparecen en el subsistema de curvas simétricas de la 3.1224, se deduce:

Que alfa minúscula es el simétri de beta minúscula sub-índice uno.

Que el equivalente de beta índice cero es igual a $-1-3\beta_2$

68

Al sustituir en la (3) de 3.1224 el valor de alfa minúscula por su equivalente (el simétrico de beta-uno) se deduce que beta índice uno es nula y que, en consecuencia, lo es, también su simétrio alfa.

Al sustituir en (4) de 3.1224 el equivalente de beta-cero se obtiene una ecuación de la que se deduce el valor de beta-dos como el cociente de $(-\gamma_4 + 3)$ entre $(-9 + 5\ \gamma_4)$

Al sustituir el valor de beta-dos por su equivalente en el equivalente de beta-cero recién asentado, se obtiene como equivalente de beta-cero, el cociente que resulta de dividir $(-2\ \gamma_4)$ entre $(5\ \gamma_4 - 9)$

Como puede verse, beta-cero y beta-dos (los dos parámetros de orden par) son los únicos que se necesitan para especificar el subsistema de curvas simétricas.

3.2 EL SUBSISTEMA DE CURVAS SIMETRICAS.

La pendiente de la hipergeométrica y la expresión general del sistema de curvas de frecuencia en términos de desviaciones con respecto a la media aritmética en unidades de la desviación cuadrática media, quedan dadas por la expresión de la referencia 3.21. Delta minúscula cumple, en la 3.21 la función que x cumplia anteriormente; alfa minúscula la que cumplía a minúscula; las betas minúsculas, las funciones correspondientes originalmente a las bes minúsculas.

69

Pero, como beta minúscula índice uno es nula en el subsistema de curvas simétricas+ según quedó asentado en la referencia 3.1225, y alfa minúscula es asimismo nula en dicho subsistema (por ser su simétrico), la expresión se simplifica. Tal es la expresión derivada, genérica del subsistema de curvas simétricas.

3.21 La Forma Integral del Subsistema.

Si se integra la expresión derivada genérica 3.211, y se representan por D las dos raíces iguales de la ecuación que puede formarse con el denominador, se tiene la expresión 3.21 .

La integración del primer miembro (derivada entre función) produce el logaritmo natural de la función.

Para la integración del segundo miembro, hay que considerar que el binomio del denominador $\beta_0 + \beta_2\delta^2$ se puede sustituir por el producto de tres factores: β_2,$(\delta - D)$y $(\delta + D)$. La integración produce $1/2\ \beta_2$ por la suma de los logaritmos naturales de $(\delta + D)$ y de $(\delta - D)$, más la constante de integra-

---

+ Obsérvese que mientras en ese caso tanto nuestro parámetro beta-uno como el índice de asimetría (la beta-uno de Pearson) son nulos, en el caso de las curvas mesocúrticas que se estudiarán más tarde, nuestro parámetro beta-dos no debe confundirse con el índice de curtosis (beta-dos de Pearson) pues mientras la curtosis es 3, el parámetro beta-dos no tiene que se 3 necesariamente.

ción, c.

Si se toman antilogaritmos del primero y del segundo miembros, se obtiene:

Para el primer miembro, "y", antilogaritmo del logaritmo de y.

Para el segundo, que es una suma, el producto de los dos sumandos, tomados en forma antilogarítmica. De esos sumandos, el segundo es la constante de integración que, como antilogaritmo, se convierte en una exponencial (la base de los logaritmos naturales, e, elevada a la constante). El primer sumando de la expresión logarítmica es --a su vez-- el producto de dos factores, de los que el exterior no es logarítmico y el interior si lo es. En esas condiciones, su antilogaritmo es una potencia cuyo exponente es el factor no logarítmico ($1/(2\ \beta_2)$. El antilogaritmo del factor logarítmico lo es de una suma de logarítmicos que se transforma en producto de expresiones no logarítmicas; así, la suma de Log (δ + D) y Log (δ - D) se transforma en el producto de (δ + D) por (δ - D).

Como el producto de (δ + D) por (δ - D) es igual a la diferencia de los cuadrados de δ y de D, se puede escribir la fórmula fundamental siguiente de la referencia 3.21, después de la cual se ha escrito la equivalencia de D y la representación que en seguida se hará del exponente $1/(2\ \beta_2)$ para mayor comodidad (se le representará por a).

3.211 Obtención del Parámetro Y' en el Subsistema.

La expresión 3.21 también se puede escribir en la forma dada por

71

la referencia 3.211, si simplemente se divide entre D^2, dentro del paréntesis, y se multiplica el resultado por esa misma D al cuadrado, elevada a su vez, al exponente a que es el del paréntesis dentro del que se ejecutó la operación.

Si se integra la expresión resultante, se obtiene el efectivo de la distribución que representaremos por la suma (sigma mayúscula) de las frecuencias (f) o por Sf.

La integral debería de extenderse de menos infinito a más infinito, pero, como la expresión es simétrica, dicha integral puede sustituirse por el doble (a) de la integral que se extienda de cero a infinito. En la expresión correspondiente, en vista de que lo límites nos impiden escribir el referente de la integración al pie del integrador, hemos seguido el procedimiento habitual de indicar dicho referente mediante el factor diferencial (d o) (diferencial de delta minúscula).

Para integrar, cambiaremos variable, conforme la muestra el desarrollo de la 3.211.

A la expresión de dentro del paréntesis la representaremos por z, y a su potencia de orden a, por z a la potencia a.

En seguida buscaremos los equivalentes de los límites, y del factor diferencial del integrando.

Si sustituimos el equivalente de los límites, del factor diferencial y del no diferencial en la expresión inicial que da el efectivo de la distri-

72

bución, tendremos una nueva integral que podemos caracterizar, en forma analítica, como sigue:

Una integral	(I)
definida entre cero y uno	(1, 0)
de una variable	(z)
elevada a un exponente constante	(a)
y multiplicada por el complemento a 1 de esa variable	(1-z)
elevado, a su vez, ese complemento, a otra constante	(-1/2)
estando referida toda la integral a la variable z	(dz)

La anterior es una función típica. Se la conoce como función "beta mayúscula" (B) de los exponentes (a y -1/2, en el caso) incrementados (cada uno de ellos) en una unidad. O sea, que se trata de la función Beta de a+1 y de (-1/2) + 1. Finalmente, esto significa que todo el integral anterior se puede representar por B (a+1, (1/2))

Pero, la función beta mayúscula de b y c (en general) es igual a otra función característica (designada por gamma mayúscula Γ) de la primera constante (b) por la función gamma de la segunda (c) dividida entre la función gamma de la suma de esas constantes (b+c)

En el caso concreto, la función Beta de a+1 y de 1/2 se puede substituir por el porducto de gamma mayúscula de a+1 por gamma mayúscula de $\frac{1}{2}$, dividido ese producto entre gamma mayúscula de a+1+$\frac{1}{2}$ o gamma mayúscula de a+1$\frac{1}{2}$.

La función gamma mayúscula de $\frac{1}{2}$ es igual a la raíz cuadrada de pi minúscula (n). De ahí que se pueda hacer la sustitución correspondiente en la fórmula del efectivo (Sf).

Al despejar de esa última fórmula y' (pasando su factor constante D a la 2a+1 como denominador de Sf, e invirtiendo numerador y denominador de su factor fraccionario, al pasarlo al otro miembro, se tiene, finalmente, el equivalente del parámetro Y'

3.22 Procedimiento para la Interpolación de una Curva del Subsistema Simétrico.

De acuerdo con los desarrollos anteriores, el procedimiento básico para interpolar una curva simétrica del sistema pearsonaiano, consiste, por tanto, en:

3.221 Comprobar que no hay asimetría o que la asimetría es muy pequeña, para lo cual conviene calcular el valor de gamma minúscula índice-tres (tercer momento sigmático) o sea, el que resulta de dividir el tercer momento no-sigmático entre el cubo de sigma (o el que se obtiene al transformar los datos originales en unidades sigmáticas y calcular el tercer momento de estas transformadas).

3.222 Obtener el valor del parámetro básico gamma índice cuatro (en forma análoga)

3.2223 Sustituir el valor de gamma cuatro en las fórmulas de D.a, y'

74

3.224 Sustituir los valores de los parámetros D, A, y' en la fórmula genérica del subsistema de curvas simétricas.

3.225 Calcular los valores teóricos de las frecuencias dando valores a delta minúscula en la expresión específica de la curva recién encontrada.

 75

3.24 Procedimiento Detallado de Interpolación de una Curva Sim´etrica

Si seguimos el proceso que nos el proceso que nos condujo a nuestras diversas fórmulas, podremos delinear un procedimiento práctico para interpolar una curva del sistema simétrico. El procedimiento será el siguiente.

3.241 Procedimiento Detallado.

3.2411 Calcular el cuarto momento con respecto a la media aritmética en unidades sigmáticas.

Para ello, se necesitará:

3.24111 Calcular la media aritmética ($\bar{x}$)

3.24112 Restarla de cada dato, para obtener desviaciones (d)

3.24113 Elevar al cuadrado las desviaciones (d^2)
Sumar los cuadrados (Sd^2)
Dividir la suma entre el efectivo ($\div Sf$)
Extraer la raíz cuadrada del cociente
para obtener la desviación cuadrática media (σ)
(sigma minúscula)

76

3.24114 Dividir cada desviación entre la desviación cuadrática media para obtener desviaciones sigmáticas (d) (σ) (δ) (delta minúscula)

3.24115 Elevar a la cuarta potencia los cocientes (δ^4)
Sumar las cuartas potencias ($S\delta^4$)
Dividir la suma entre el efectivo (Sf)
para obtener (γ_4) (gamma-cuatro)

O bien habrá que:

3.24111b Calcular la media aritmética ($\bar{x}$)

3.24112b Restarla de cada dato (d)

3.24113b Obtener, a partir de las desviaciones(d)
el segundo momento con respecto a la media (u_2 o μ_2)
y el cuarto (u_4 o μ_4)

elevando las desviaciones al cuadrado (d^2)
sumando los cuadrasos, y
dividiendo la suma entre el efectivo (Sf) (u_2)

77

elevando las desviaciones a la cuarta,
sumando las cuartas potencias y
dividiendo la suma entre el efectivo (u_4)

3.24114 b Dividir el cuarto momento (u_4)
entre el cuadrado del segundo momento (u_2^2)
para obtener el cuarto momento sigmático (γ_4)

3.2412 Sustituir el valor de gamma-cuatro (γ_4)

3.24121 en la fórmula de beta-cero (β_0)

3.24122 en la fórmula de beta-dos (β_2)

3.2413 Reemplazar los valores de las betas (β_0, β_2)

3.24131 en la fórmula de (D^2)

3.24132 en la fórmula de (a)

3.2414 Reemplazar D y a en la fórmula genérica de Y' (Y')

3.2415 Reemplazar D, a y Y' en la fórmula genérica de y

3.2416 Dar valores a las delta-minúscula (δ) en la
fórmula genérica de y,
para obtener las frecuencias teóricas de la curva del subsistema simétrico.

78

4. LOS TIPOS PRINCIPALES DE CURVA PEARSONIANA.

4.1 EL SISTEMA PEARSONIANO.

El sistema pearsoniano de curvas de frecuencia está constituido por un conjunto de funciones de distribución, representadas en su forma diferencial por la ecuación de la referencia 4.11.

Las formas o tipos principales del sistema se obtienen cuando el denominador es el trinomio de segundo grado, completo (o sea, cuando en el denominador existen tres términos: uno, en equis cuadrada; otro en equis a la primera y un último término en equis a la potencia cero. Lo anterior equivale a decir que se tiene el trinomio de segundo grado completo cuando tanto b subíndice dos como b sub-uno y b sub-cero son diferentes de cero.

Las formas o tipos transicionales se producen cuando el denominador es de segundo grado (o sea, cuando existe término en equis cuadrada, o sea, cuando b sub-dos es diferente de cero) pero NO es un trinomio. Esto ocurre:

O cuando falta el término en equis (o sea, que b sub-uno es igual a cero)
O cuando falta el término en equis a la potencia cero (o sea, cuando b sub-cero es igual a cero),
O cuando faltan ambos términos, en equis y en equis a la cero (o sea, cuando b sub-uno y b sub-cero son nulos)

Este último caso puede considerarse como forma o tipo secundario del sistema.

Las formas o tipos decadentes o vestigiales aparecen cuando el denomi-

79

nador NO es de segundo grado sino que es de grado inferior al segundo (de primer grado o de grado cero). Esto ocurre cuando no existe término en equis cuadrada (o sea, cuando b sub-dos es nulo). El denominador puede ser, entonces:

O un binomio de primer grado $b_0 + b_1x$

O un monomio de primer grado b_1x

O un monomio de grado cero (i.e. una constante) b_0

Las formas vestigiales y transicionales ya han sido objeto de referencias previas. De ahí que intentemos ocuparnos ahora de los tipos principales de curva pearsoniana. Estos tipos resultan de discutir matemáticamente una ecuación: la que se forma al igualar a cero el trinomio de segundo grado, del denominador, conforme aparece en la referencia 4.12.

Los tipos principales de curva pearsoniana se producen cuando en la formula de las raíces, reproducida en la referencia 4.13, el radical es diferente de cero. Esto equivale a decir que los tipos pearsonianos principales se producen cuando el cuadrado de b sub-uno es diferente del producto que se obtiene de multiplicar b sub-cero y b-sub dos multiplicado por cuatro. "Diferente", en este caso, significa:

O diferente en valor,
O diferente en signo
O diferente en valor y signo.

Si b-uno al cuadrado y 4 be-cero be-dos son diferentes entre sí en va-

80

lor, aunque sean de igual signo, los términos correspondientes producirán una resta distinta de cero. Si los dos términos del sub-radical (que son los que hemos mencionado) difieren en signo (difieran o no en valor), la resta se convertirá en una suma de positivos y, consiguientemente, NO será nula. Si ambos difieren entre sí en valor y signo --conjuntamente-- con doble razón, la resta no se podrá anular.

La anulación del radical puede producir tipos secundarioso terciarios de curva que no estudiaremos aquí para conservar el delineado tan nítido como sea posible.

4.11 Descomposición del Trinomio en Factores.

El trinomio de segundo grado se puede descomponer en tres factores, de los cuales:

1.- el primero estará dado por el coeficiente de la segunda potencia de la variable (b sub-dos). Referencia 4.111.

2.- el segundo, por equis menos la primera de las raíces de la ecuación (o sea, aquella en que el radical aparece con signo positivo). Referencia 4.112.

3.- el tercero, por equis menos la segunda de las raíces (o sea, la raíz en la que el radical va precedido de signo menos) Referencia 4.113.

81

O sea, que si representamos a $b_1/(2b_2)$ (b sub-uno entre dos veces b sub-dos) mediante una B (be mayúscula), de acuerdo con la referencia 4.114, y al radical dividido entre dos veces b sub-dos por R (erre mayúscula) tendremos como representación del trinomio, la fórmula de la referencia 4.115.

4.12 Discusión de la Fórmula

Los tipos principales de curva pearsoniana se relacionan con el valor de erre mayúscula (R). Erre mayúscula puede representar un valor real o uno imaginario (alternativas compatibles con la condición, ya especificada, de que R debe ser distinto de cero). Si R es real, la referencia anterior basta y no hay que modificarla para el caso particular. Si R es imaginario, la solución anterior se puede especificar como lo indica la referencia 4.121

Si se desea simplificar, estas fórmulas se pueden escribir como lo indican las referencias 4.122 y 4.123. En estas referencias, figura una nueva variable (equis mayúscula, X) cuya equivalencia con la antigua (equis minúscula, x) queda dada por la expresión de la referencia 4.124.

R, por su parte, válida para ambas expresiones (no ya genéricas sino específicas) es igual a la raíz cuadrada del VALOR ABSOLUTO de la diferencia entre el cuadrado de b sub-uno y cuatro veces el producto de los otros dos coeficiente b (b sub-cero y b sub-dos) dividida --dicha raíz-- entre el doble de b sub-dos. Referencia 4.125.

Con vistas a los desarrollos ulteriores, en cuanto se ha cambiado variable en el denominador (quis mayúscula en vez de equis minúscula, o X en

82

vez de x) conviene hacer un cambio semejante en el numerador. Para ello, se puede sumar y restar del numerador, B (be mayúscula) con lo que el denominador no se altera, y, en seguida, se pueden hacer dos substituciones.

1a.- Equis minúscula más be mayúscula se puede sustituir por equis mayúscula $\dfrac{(x + B)}{X}$

2a.- Menos be mayúscula (B) más a minúscula(a) puede representarse --en cuanto es una suma algebraica de constantes-- por otra constante (A, por ejemplo) $(-B+ a)$

Las referencias de la 4.126 a la 4.129 dan cuenta de estas sustituciones.

4.13 Integración de la Fórmula

Con el fin de salir de las relaciones entre derivadas, que quedaron expresadas por la referencia inicial, se debe proceder a integrar ambos miembros con respecto a la variable x, tal y como queda indicado en la referencia 4.1301.

Como la integral con respecto a equis, de la derivada(respecto a esa misma equis) del logaritmo de "y" es el propio logaritmo de "y" (puesto que dos operadores contrarios anulan sus efectos), es posible escribir la referencia 4.1302.

Para la integración del segundo miembro, procederemos en forma distinta según que las raíces sean reales o complejas, o sea, según que el radical sea real o imaginari; en último término, según que en la fórmula específica (no en la genérica) aparezca R simplemente, o Ri (erre mayúscula por i minúscula, representación de la unidad imaginaria)

4.131 Integración cuando las Raíces son Reales.

Cuando las raíces son reales, se puede tomar como punto de partida la expresión 4.126 que, gracias a las sustituciones de las referencia que van de la 4.126 a la 4.129, se convierte en la 4.1311.

Para integrar la expresión (Referencia 4.1311), conviene comensar por sacar a b sub-dos (que figura como factor en el denominador) del signo de integración (ya que un factor constante no se altera al entrar o salir del integrador). Por ello, en la referencia 4.1312, figura uno sobre b sub-dos como factor de la expresión por integrar.

4.1313 Descomposición en Fracciones Parciales, para Integrar.

Para integrar la expresión que en el segundo miembro quedó bajo el integrador, conviene dividir la fracción total en dos parciales (dos fracciones). Estas --según se sabe-- tendrán por denominadores cada uno de los dos factores que forman el denominador de la fracción originaria (equis mayúscula más erre mayúscula o X + R, por una parte, y equis mayúscula menos erre mayúscula o X - R, por otra). Sus denominadores son X + R y X - R. Sus numeradores se determinarán por el procedimiento delineado en la referencia 4.13132, que sub

84

sigue a la igualdad 4.13131. Esta muestra --por su parte-- la equivalencia entre la fracción originaria y la suma de las dos fracciones parciales, cuyos numeradores (que hemos designado por las mayúsculas D y E) desconocemos.

La descomposición produce dos fracciones. Estas tienen por denominadores: 2R(X+R) y 2R(X-R), y por numeradores (R-A) y (R+A) respectivamente, como muestra la referencia 4.13133.

4.1314 Integración de las Fracciones Parciales.

Restituido el equivalente de la integral del primer miembro y el de la del segundo, se obtiene la 4.1314 , en cuyo primer miembro figura el logaritmo natural de y, en tanto que en el segundo miembro se encuentra el factor uno sobre b sub-dos afectando a la integral de una suma de fracciones.

La integral de la suma de fracciones se reducirá a la suma de integrales de los sumandos. Estas integrales, al ser substituidas por sus resultados, producirán la referencia 4.13141.

El segundo miembro de esta última referencia está formado por:

1.- el factor común (uno sobre b sub-dos) $(1/(b_2))$

2.- un factor binomio en el que los términos son los integrales de las fracciones parciales recién obtenidas.

Los integrales de las fracciones parciales, a su vez, son integrales de constantes (R-A, en un caso, y R+A en el otro) divididas entre variables

(X+R, en uno, y X-R en el otro caso) y, por lo mismo, dan como resultado dos productos de idéntica estructura en los cuales las constantes aparecen como coeficientes de los logaritmos naturales de las variables, que figuran en el denominador respectiva.

4.1315 Resultados en Forma Antilogarítmica.

La expresión resultante (4.13141) está dada en forma logarítmico-natural. Para pasar del nivel logarítmico al no-logarítmico, es necesario tomar las exponenciales correspondientes al primero y al segundo miembros e igualar los resultados.

1. La exponencial del logaritmo de "y" es e (la base de los logaritmos naturales) elevado al logaritmo natural de y. Pero como la base de un sistema de logaritmos elevada al logaritmo de una cantidad ("y", en el caso), es igual a la cantidad, el primer miembro se reduce a "y".

2.- En cuanto al segundo miembro de la nueva expresión (referencia 4.13151) será igual a e (base logarítmico-natural) elevado a todo el segundo miembro de la anterior (referencia 4.13141)
O, también, será igual al producto de tres factores exponenciales, constituido cada uno por e elevado a cada uno de los tres términos del segundo miembro de la 4.13141, según lo muestra la 4.13152.

4.316 Fórmula cuando las Raíces son Reales.

Finalmente, por consideraciones análogas a las que se hicieron para el

86

primer miembro, cada factor exponencial del segundo se puede sustituir por una potencia. En estas potencias, el factor que aparecía sujeto a logaritmación se convierte en base de la ponencia, y el coeficiente de la expresión logarítmica en su exponente. Así, las bases de esas potencias son X+R y X-R y los exponentes $(1/b_2)$ por (R+A)/2R y (R-A)/2R respectivamente. e elevada a C (la constante de integración), que formaba el tercer término se puede escribir como el antilogaritmo de C o representarse, convencionalmente por y' que será una constante en cuanto antilogaritmo de otra constante. De este modo se puede pasar de la 4.1352 a la 4.13153.

La expresión resultante nos da las relaciones entre las ordenadas y las abscisas de la primera curva principal del sistema pearsoniano (Referencia 4.1316).

4.317 Fórmulas Alternativas del Primer Tipo de Curva Pearsoniana.

Si en la fórmula que acabamos de obtener (4.316) cambiamos signoas a los numeradores y denominadores de los dos exponentes, estos se convertirán en los que se asientan en las referencias 4.3171 y 4.3172. Al sustituir estos valores, se obtiene la expresión de la referencia 4.3171.

Si en lugar de A ponemos su valor -a-B (4.31720), obtendremos como equivalente de A-R y de -A-R las referencias 4.31721 y 4.31722. Podemos recordar, además, que X representa a x-B (4.31723). Estos valores, sustituidos en la ecuación, nos producirán la 4.3172.

Si en la 4.3172 representamos a -B-R por A índice uno y a -B+R por menos A índice dos, podremos escribir la expresión de la referencia 4.3173 por-

87

que, en efecto, A-uno más A-dos es gual a menos 2R, como lo muestra la referencia 4.31733.

Esta forma del primer tipo principal de curva pearsoniana (ecuación con origen en la media) se puede obtener directamente al integrar la fórmula inicial, en la que el trinomio aparece descompuesto en los factores be-dos, equis menos la primera raíz de la ecuación de segundo grado y equis menos la segunda raíz de esa ecuación.

Si en la ecuación 4.3173, agregamos y restamos "a" a la equis (x) y sustituimos a x+a por chi minúscula ( ), podemos representar a A-uno meno a (A_1-a) por a-uno (a_1) y a A-dos menos a (A_2-a) por a-dos (a_2) (referencias 4.31742 y 4.31743).

Si se sustituyen los equivalentes de las Aes (aes mayúscualas) en A_1+A_2, se puede comprobar que su suma es igual a la suma de las aes minúsculas a_1+a_2. De acuerdo con todo lo anterior, se puede escribir la referencia 4.3174.

Si en la 4.3174 dividimos la expresión de dentro del primer paréntesis entre a, esto equivaldrá a divir toda la expresión entre la potencia de a_1 elevada al exponente de dicho primer paréntesis (que, por brevedad, se puede representar por e_1). Algo análogo podemos hacer con la expresión de dentro del segundo paréntesis de la 4.3174, que podemos dividir y multiplicar por a_2, elevada al exponente de dicho paréntesis (representable por e_2), conforme a la referencia 4.31752. Sustituidos estos valores en la 4.3174, se obtiene la 4.3175.

88

Finalmente, si designamos al producto de ye-uno por las aes elevadas a sus exponentes respectivos, mediante la literal y_0 (referencia 4.31761) obtendremos la expresión 4.3176, que es la ecuación que representa el primer tipo de curva pearsoniana cuando el origen se encuentra en el modo (a esto equivalió, en efecto, el paso de la variabe x a la variable ch que se logró mediante la resta de "a", pues "a" es, precisamente, la distancia entre la media y el modo).

4.132 Integración cuando las Raíces son Complejas.

4.1321 Forma Derivada.- Lo que se necesita integrar, en este caso, en el segundo miembro, es la expresión de la referencia 4.13211, en cuyo denominador figuran dos factores complejos. En efecto, en cada uno de esos factores existe un término real (equis mayúscula, X) y uno imaginario (Ri, afectado de signo más en uno de ellos, y de signo menos en el otro). i es la unidad imaginaria, igual a la raíz cuadrada de menos uno ($i = \sqrt{-1}$)

Si se multiplican estos factores del denominador de 4.13212 (que son complejos conjugados) se obtiene una SUMA de cuadrados de las partes reales (cuadrado de las equis mayúsculas, X^2) y de los coeficientes de las partes imaginarias (cuadrado de las erres mayúsculas, coeficientes de Ri)(R^2). En caso de duda respecto de este resultado puede ejecutarse la multiplicación de X + Ri por X - Ri y sustituir en el producto obtenido ($X^2 - R^2i^2$) el valor de i^2 o sea, del cuadrado de la raíz de menos uno (que es, por supuesto, igual a menos uno)

4.1322 Integración.- Para integrar, recordamos la anulación de las influencias de integrador y derivador cuando se aplican a la misma función y se refieren a la misma variable, en el primer miembro. Esta anulación reduce el primer miembro al logaritmo natural de y.

En el segundo miembro, a más de sacar al factor constante $1/b_2$ del integrador, descompusimos la fracción del integrando X+A sobre X^2+R^2 en dos fracciones de igual denominador (X^2+R^2) y cuyos numeradores fueran los términos de la originaria: X numerdor de la primera, y A, numerador de la segunda, después de lo cual, a cada fracción resultante la afectamos del integrador, como registra la referencia 4.13221.

La integral de la primera fracción no es de una variable X (equis mayúscula) dividida entre la suma del cuadrado de la misma y el cuadrado de una constante. Esta equivale al logaritmo natural del denominador dividido (el logaritmo) entre dos, exponente de la variable en el denominador.

El integral de la segunda fracción no es de un quebrado cuyo denominador está formado por una suma de cuadrados de variable y constante, y cuyo numerador --a diferencia de lo que ocurrió en la fracción anterior-- es NO una variable, sino una constante. La constante del numerador puede salir del integrador. El resto es una integral bien conocida que produce el arco cuya tangente está dada por un cociente: el que resulta de dividir la viariable y la constante que figuran en el denominador, debiendo dividirse el arco cuya tangente es ésa, entre la constante del denominador. Esto explica el resultado 4.13222.

4.1323. Fórmula Cuando las Raíces son Complejas.- Para pasar de la expresión

90

logarítmica a la dada en números naturales, sólo hay que tomar los antilogaritmos de la misma base (o sea, hay que exponenciar). El logaritmo del primer miembro, exponenciado, se reduce a y. En el segundo miembro, el factor correspondiente a la constante de 4.1323 lo podemos representar por y'. El término logarítmico del segundo miembro se convierte en una potencia. En ella, la expresión que aparecía sujeta a logaritmación (X^2+R^2) aparece como base, y el que aparecía como su coeficiente $(1/(2b_2))$ aparece como su exponente. Por último, el lsegundo término del segundo miembro, que no está afectado por el logaritmador, equivale a una exponencia en la que el término al que nos referimos aparece como exponente de e, base de los logaritmos naturales, según se expresa en la 4.1323.

4.2 FORMULAS DE LOS PARAMETROS.

Para encontrar los valores de los parámetros de las fórmulas con las que hemos venido trabajando, necesitaremos cuatro ecuaciones simultáneas con cuatro incógnitas, pues son cuatro los parámetros elementales de la ecuación principal de Pearson (a, b_0, b_1 y b_2)

Estas cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas se pueden obtener a partir de referencias análogas a las 3.1221 si las ecuaciones anotadas en ellas se reducen a modo de que sólo contengan los términos en los que figuren los parámetros elementales a, b_0, b_1 y b_2 y si, por otra parte, se eligen sólo las cuatro primeras ecuaciones.

91

Elegidas las cuatro primeras, y reducidas a modo de que contengan sólo los cuatro primeros términos, las ecuaciones resultantes se simplifican si en vez de tomar los momentos con respecto a una media arbitraria, se toman los momentos con respecto a la media aritmética. Con esto, se anulan todos los términos en los que figura el primer momento, y se reducen a la unidad todos los momentos de orden cero que figuran en estas ecuaciones.

4.21 Sistema Simplificado de Ecuaciones.- Las ecuaciones de la referencia 4.21 constituyen un sistema de cuatro ecuaciones simultáneas con cuatro incógnitas (los parámetros a, b_0, b_1 y b_2).

4.22 Despeje y Simplificación.- Si se despeja al parámetro "a" de la 4.211, se obtiene la 4.221. Al despejar a b sub-cero de la 4.212 se obtiene la 4.222.

La referencia 4.221 expresa, así, que el parámetro "a" no es sino el simétrico del parámetro b sub-uno (es igual a él, pero de signo contrario). La 4.222 da el equivalente de b sub-cero en términos del segundo momento central (mu sub-dos) y del parámetro b sub-dos.

La sustitución de a por su equivalente (menos b sub-uno) y la reducción de los dos primeros términos semejantes de la 4.213, permite escribir la 4.223.

La sustitución de los parámetros a y b sub-cero por sus equivalente tomados de 4.221 y 4.222 en la ecuación 4.214, produce la 4.2241 que, por reducción de los términos semejantes en b sub-uno y b sub-dos produce las 4.2242 y 4.2243 que, finalmente, mediante el paso de "menos tres mu sub-dos al cuadrado"

92

$(-3\ u_2^{\ 2})$ al segundo miembro, produce la 4.232.

4.23 Sistema de b_1 y b_2.- Las ecuaciones 4.223 o 4.231 y 4.232 forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (los parámetros b_1 y b_2)

4.24 Solución. Para resolver el sistema, recurriremos a determinantes.

4.241 El valor de b sub-uno está dado por una fracción cuyo denominador es el eliminante del sistema (formado por los coeficientes de b sub-uno y b sub-dos, tomados en su orden, y cuyo numerador es el determinante obtenido de sustituir en el eliminante los coeficientes de b sub-uno por los términos independientes (o sea, de sustituir 2 mu sub-dos y 3 mu sub-tres por menos mu sub-tres y 3 mu sub-dos al cuadrado menos mu sub-cuatro ($2\ u_2$ y $3\ u_3$ por $-\ u_3$ y $3\ u_2^{\ 2}\ -\ u_4$) (Referencia 4.2411)

4.242 Valor de b_1.- Sustituidos los determinantes por sus valores en la 4.24111, reducidos los términos semejantes del numerador de la 4.2412, tras de sacar a mu sub-tres como factor común del numerador, se obtiene la expresión 4.2413 que da el valor del parámetro b sub-uno.

Valor de b_2.- Para obtener el valor del parámetro b sub-dos, se recurre al mismo eliminante; o sea, que el denominador será igual al del parámetro b sub-uno. Como numerador de la fracción correspondiente, se utiliza el determinante que resulta de sustituir los coeficientes de b sub-dos (parámetro que se busca) por los términos independientes (que ahora aparecen en la segunda columna), según muestra la referencia 4.2421.

Sustituído el determinante del numerador por su valor, se obtiene la expresión 4.2422 en la que D representa el valor de la referencia.

4.243 Valor de a.- Obtenidos los valores de b sub-uno y de b sub-dos, el valor del parámetro "a" se obtiene fácilmente, pues ya hemos encontrado que es el simétrico de b sub-uno; o sea, que será igual al valor de 4.2413 afectado de signo negativo, según aparece en la 4.243.

4.244 Valor de b_o.- El valor de b sub-cero, transcrito de la 4.222, se consigna en la 4.2441. La substitución de b sub-dos por su valor encontrado en la 4.2422, produce la 4.2442.

Al ejecutar la suma de dentro del paréntesis, se obtiene la 4.2442 que, mediante la reducción de sus términos semejantes (eliminación de los términos en mu sub-dos al cubo, por tener el mismo coeficiente "18" y signos opuestos) produce la 4.2444 en la que está consignado el valor del parámetro b sub-cero de la ecuación de Pearson.

Los valores de los cuatro parámetros elementales aparecen debidamente subrayados en el formulario correspondiente.

4.3 OBTENCION DEL PARAMETRO Y'

El parámetro y' del sistema pearsoniano procede, como puede recordarse, de la constante de integración. Dicha constante de integración --cuando se pasó se las expresiones logarítmicas a las expresiones naturales-- se convirtió en el exponente de un factor exponencial cuya base era e. De este modo, si a la constante de integración la representamos por C, y' es igual a e (base de los logaritmos naturales) elevada a la C.

94

El valor de e a la C o de y' se determina fácilmente si se considera que la integral del segundo miembro de la ecuación pearsoniana es igual a la suma de todas las probabilidades, y que la suma de éstas, en una función de distribución, es igual a 1; o que la suma es igual al efectivo de la distribución. De ahí que sea factible obtener, para cada curva del sistema pearsoniano, un valor de y' que procede de:

1o.- la integración del segundo miembro de la ecuación correspondiente

2o.- la igualación de esa integral con el efectivo de la distribución,

3o.-el despeje de y' de la expresión resultante.

4.31 Obtención de y' cuando las raíces son reales.

Si, con fines de simplificación, representamos los exponentes que figuran en la expresión 4.4 por m (eme minúscula) y M (eme mayúscula) respectivamente, tendremos fácilmente la igualdad de la referencia 4.310.

4.311. Simplificación.- Al integrar ambos miembros de la 4.310, se obtiene, en el primer miembro, la suma de las frecuencias o efectivo de la distribución. En el segundo miembro se tendrá la integral de un producto de tres factores: uno de ellos, constante (y') y dos de ellos variables (o sean los binomios X+R y X-R elevados respectivamente a las potencias m y M). Figura, además, un factor diferencial (dX) que indica cuál es el referente de la integración. Esta integral tiene --además-- como límites, +R y -R, como se indica en el integrador de la referencia 4.3111.

95

Como y' es un factor constante, puede entrar o salir del integrador de la 4.3111 sin alterarse. Es por ello por lo que, al sacarlo del integrador, se pudo escribir la referencia 4.3112.

4.312 Cambio de Variable.- Si igualamos (R+X)/2R a Z (erre más equis mayúscula sobre el duplo de R, igualdado a Z) conforme lo indica la referencia 4.31211, al despejar sucesivamente a R+X y a X, obtenemos las equivalentes 4.31212 y 4.31213. La diferencial de esta última nos produce la 4.31214. Finalmente, para obtener la 4.31215, sumamos y restamos R a X-R (que, por lo mismo, no se altera); pero, como R+X es igual a 2RZ, es posible escribir, como tercer eslabón de la cadena de igualdades, "RZ - 2R que, al sacar como factor común a 2R, produce, como último eslabón de la cadena, 2R(Z-1).

Si a la 4.312 la transformamos en 4.3122, no se altera. En efecto, la inversión del minuendo y el substraendo del paréntes X-R, que se convierte en R-X, equivale a la multiplicación del paréntesis por -1, o sea, a la multiplicación de la potencia correspondiente por (-1) elevado a la potencia M. Este es el factor constante que afecta al integrando y que puede salir del integrador. En la 4.3122, lo hemos hecho salir, sin producir modificación.

Para poder hacer la sustitución correspondiente en la 4.311, cambiaremos signos en la 4.309 y, de este modo, obtendremos la 4.310.

La sustitución de la antigua variable X, por la nueva variable Z, impone un cambio en los límites de la integral. Para calcular los nuevos límites, tomaremos la 4.31211 y sustituiremos en ella X por R, límite superior; al despejar a Z, de acuerdo con la 4.31213, tendremos como nuevo límite superior 1.

96

En forma parecida, si en la 4.31213 tomamoes, en vez de X, el antiguo límite inferior -R, la sustitución produce como nuevo límite inferior, cero.

Si en la 4.3122 se sustituyen X+R y R-X por sus valores, obtenidos en las expresiones anteriores, se obtiene la expresión 4.3123, en donde aparece también el valor 2Rdz tomado de la 4.31212, equivalente del antiguo diferencial (dX). Los límites de la integral son los recién calculados: 0 y 1.

4.313 Resultados del Cambio de Variable.- En la 4.3123, figuran en el integrando varios factores 2R elevados a diferentes potencias (m, M, 1). Todos estos factores se pueden agrupar si se toma 2R y se eleva a la suma de los exponentes m+M+1. El resultado se consigna en la 4.3131. Como 2R elevado a (m+M+1) es un factor constante, puede salir del integrador sin alterarse.

4.3132 En Términos de Beta.

4.3132 Definición de la Función Beta.- Por definición, el nuevo integral entres 0 y 1 de z a la m por (1-z) a la M, por dz, se conoce como la función Beta mayúscula (B). En efecto, esta función se caracteriza por:

1.-Ser una integral definida,
2.-cuyos límites son cero y uno,
3.-cuyo integrando está formado por tres factores:

a.-el primero de los cuales es una variable potenciada,
b.-el segundo de los cuales es el complemento aritmético de dicha variable, elevado a una potencia distinta a la del primer factor,
c,-el tercero de los cuales (referente) es el diferencial de la variable.

97

La especificación de la función beta mayúscula se hace mediante la mención de los exponentes a los que están elevados: la variable --por una parte-- y su complemento aritmético --por otra-- adicionados, cada uno de ellos, de una unidad. Hacia estc llama la atención la referencia 4.31321 que nos permite que escribamos como equivalente de la 4.3131 la 4.31322, en donde aparece la función beta mayúscula de m+1 y M+1.

4.314 Despeje de Y'.- Si se despeja a y', de la expresión 4.31322, se obtiene la 4.3141, en la cual aparece el efectivo en el numerador de una fracción, en tanto que el otro factor fraccionario está dado por el recíproco de la función beta mayúscula de (m+1) y (M+1).

Existe otra función conocida como la función gamma mayúscula, cuyas relaciones con la función beta mayúscula quedan dadas por la expresión 4.3142. De acuerdo con ella, la función beta mayúscula de dos cantidades A y B, es igual a la relación que existe entre el producto de las funciones gamma mayúscula de cada una de ellas, y la función gamma mayúscula de la suma de esas dos cantidades.

La sustitución del equivalente de la función beta mayúscula de (m+1) y de (M+1) será, por tanto, el cociente que resulta de dividir la gamma mayúscula de m+1 multiplicada por la gamma mayúscula de M+1, entre la gamma mayúscula de (m+1) + (M+1), o sea, entre la gamma mayúscula de m+M+2.

Como la función beta mayúscula figura en el denominador de la expresión 4.3141, en la 4.3144 (obtenida por sustitución del valor de la función de beta en términos de las funciones gamma) aparecera en el numerador el producto de las

98

4.323 Tercer Cambio.- Si la tangente de alga es igual a equis sobre erre, según la 4.3231, al despejar a quis mayúscula se obtiene la 4.3232. Al diferenciar los dos miembros de la 4.3232, se obtiene la equivalencia del diferencial de equis mayúscula (X) en la 4.3233 que, en cuanto diferencial de una constante por una función, es igual a la constante)R) por la diferencial de la función (que, en este caso, es la tangente de alfa) (referencia 4.3234).

Como la diferencial de la tangente es el cuadrado de la secante por la diferencial del arco, se puede escribir la 4.3241 que, en cuanto se considera que la secante es la recíproca del coseno, se transforma finalmente en la 4.32342.

4.324 Cuarto Cambio.- Si integramos la 4.3235, obtendremos como primer miembro el efectivo de la distribución y, como segundo, la integral de una serie de factores; de éstos, los dos primeros y" y R son constantes y pueden salir de la integral. La integral del resto tiene por integrando la potencia 2n de la secante de alfa,"e"elevado a ene mayúscula alta, y el equivalente de la diferencial de equis mayúscula tomado de la 4.3232. La integral se extiende desde "menos pi sobre dos" a "pi sobre dos".

De la 4.3235, se puede pasar a la 4.340, sacando a R (del integrando) fuera del integrador, lo cual es posible por ser constante. Dentro del integral, como la secante de un ángulo es el recíproco de su coseno, se puede sustituir la potencia 2n de la secante por la potencia "menos 2n" del coseno. Por otra parte, el coseno cuadrado, que aparece en el denominador en 4.32401, se puede considerar como la potencia"menos dos" del coseno. Al efectuar la multiplicación de los cosenos del integrando de la 4.3217, se obtiene la potencia

99

funciones gamma de (m+1) y (M+1), y en el denominador la función gamma de(m+M+2) Esta última expresión nos da, finalmente, el valor del parámetro y' para el caso de la expresión de Pearson en el que las raíces son reales.

4.32 Obtención de y' cuando las raíces son complejas.

Transcribimos la fórmula del caso en la referencia 4.3211, en la que n y N representan las expresiones de las referencias 4.3212 y 4.3213.

4.321. Primer Cambio.- Si dividimos el binomio del paréntesis entre R al cuadrado, esto equivaldrá a dividir la potencia correspondiente entre R^2 elevada a la potencia n, O sea, que equivale a dividir entre R a la 2n. Para que la expresión no se altere, será indispensable multiplicar por esa misma cantidad (por R a la 2n) como se inidica en la 4.3214.

4.322 Segundo Cambio.- Si al "ángulo cuya tangente es equis mayúscula sobre erre mayúscula" lo representamos por alfa minúscula, como lo indica la 4.3221, "equis mayúscula sobre erre mayúscula" será igual a la tangente de alfa minúscula (referencia 4.3221).

La sustitución de los valores de la 4.3221 en la 4.3214 permite escribir la 4.32221. En ella la suma de 1 y de el cuadrado de la tangente de alfa es igual a la secante cuadrada (4.32222). La referencia 4.3223 da el equivalente del otro exponente :"ene mayúscula por el arco cuya tangente es equis entre erre".

Las sustituciones correspondientes, en la 4.3214, nos permiten escribir la 4.3224 y la 4.3225.

100

(-2n - 2), conforme aparece en la 4.32402.

Si el ángulo alfa se sustituye por su complemento (que designaremos por beta minúscula) se producen las transformaciones marcadas con las referencias 4.3241 y 4.3242 que producen 4.3243. Al pasar de la 4.3243 a la 4.3244, se sacó a "e"(base de los logaritmos naturales) elevada a "ene mayúscula por pi sobre dos" fuera del integrador (por tratarse de una constante).

En la 4.3245, el producto de este valor por y"'se representó por y^{iv}

A la integral se la representó como una función de los exponentes (menos dos ene minúscula menos dos, y ene mayúscula). Esta última transformación es conveniente porque ya hay tablas calculadas para dicha función.

4.325 Fórmula de Y' cuando las Raíces son complejas.-

Al despejar a y cuarta (y^{iv}) se obtiene la referencia 4.325. Esta, en conjunción con las igualdades que relaciona a y cuarta con y tercera o triprima (y^{iv} y y"') a ye triprima con ye biprima (y") y a ye biprima con ye prima (y') permiten el cálculo de esta última cuando las raíces de la ecuación pearsoniana son complejas.

4.4 PROCEDIMIENTO PARA LA INTERPOLACION DE LOS DOS TIPOS PRINCIPALES DE CURVA PEARSONIANA.

El procedimiento de interpolación de los dos tipos principales de curva pearsoniana, útiles para la descripción estadístico social de muchas distribuciones concretas consiste en los siguientes pasos:

101

4.41.- Se calculan los momentos con respecto a la media aritmética (u_1, u_2, u_3, u_4)

4.42.- Se sustituyen los valores encontrasos en las fórmulas de los parámetros de Pearson $(a,\ b_0, b_1, b_2)$

4.43.- Se calcula el cuadrado de be sub-uno $b_1^{\ 2}$

y, por otra parte, el producto de cuatro por be sub-cero por be sub-dos $4b_0b_2$

y se comparan los resultados para determinar si es el primero o él segundo tipo principal el que ha de emplearse.

4.44.- Mediante la sustitución de los valores de los parámetros (a, b_0, b_1, b_2)
en las fórmulas correspondientes, se calculan $(R,\ m \text{ y } M)$
así como y', en el primer tipo de curva;
se calculan $(R,\ n \text{ y } N)$
así como y', en el segundo tipo de curva.
En el segundo tipo, y' implica el cálculo directo de------------------------------- (y^{iv})
y, por pasos sucesivos, los de $(y''',\ y'',\ y')$

4.45.- Sse sustituyen estos valores en la fórmula del tipo principal de curva pearsoniana que se haya elegido.

102

4.41 Procedimiento Práctico para la Interpolación de una Curva Pearsoniana del Primer Tipo Principal.

Un procedimiento práctico para el cálculo del primer tipo principal de curva pearsoniana es el siguiente:

4.411.-Calcúlense los valores
del tercer momento sigmático (gamma-3) (v_3)
y del cuarto momento sigmático (gamma-4) (v_4)

4.412.-Sustitúyanse esos valores en la fórmula de B_2 (que es más práctico escribir simplemente como B) (B)

4.413.-Calcúlense, sucesivamente, los siguientes valores, agregando al resultado anterior
2 unidades $(B+2)$
3 unidades $(B+3)$
4 unidades $(B+4)$
y elevando al cuadrado el último valor encontrado $(B+4)^2$

4.414.-Sustitúyanse esos valores en las fórmulas
de la suma de las aes, (a_1+a_2)
de las es o sean los exponentes (e_1, e_2)
y de y_o (y_0)

103

4.415.- Sustitúyanse los valores de las aes, las es y y_0 en la ecuación del primer tipo de curva pearsoniana con origen en el modo.

104

5 T I P O S P A R T I C U L A R E S.

5.1 El Subsistema de Curvas Mesocúrticas.

Así como reconocimos anteriormente la existencia de un sub-sistema simétrico, dentro del sistema pearsoniano de curvas, podemos reconocer también, dentro de esta sistematización, la existencia de un subsistema mesocúrtico.

El subsistema simétrico ha aparecido cuando gamma-tres al cuadrado (γ_3^2) (o sea la beta-uno de Pearson, β_1) ha sido nula.

El subsistema mesocúrtico aparecerá cuando gamma-cuatro (γ_4) (o sea la beta-dos de Pearson, β_2) sea igual a 3.

Aquí nos ocuparemos de las curvas mesocúrticas del primer tipo. La derivación de la fórmula específica para ellas es igual al proceso de derivación de la fórmula genérica. Para ser más consecuentes en la simbología, puesto que conviene usar desviaciones s i g m á t i c a s, representaremos a la variable por delta minúscula (δ) y a los parámetros por betas minúscula (β's). Un desarrollo paralelo al de las referencias 4.1 a 4.1316 nos conduce a la fórmula que nos interesa.

Las fórmulas de los parámetros alfa minúscula (α) y betas minúsculas (β_0, β_1, β_2) las obtendremos mediante un desarrollo paralelo al de las referencias que van de la 4.2 a la 4.244. Este desarrollo no sólo es útil específicamente para el subsistema mesocúrtico sino que lo es para todo el sistema cuando se opera con valores sigmáticos, en la fórmula general del primer tipo de curva pearsoniana.

105

La diferencia específica del desarrollo del subsistema mesocúrtico aparece tan pronto como se hace que gamma-cuatro (γ_4) sea igual a 3. Así se obtiene:

$$D = 10 \times 3 - 18 - 12\,\gamma_3^{\,2} = 30 - 18 - 12\,\gamma_3^{\,2} = 12 - 12\,\gamma_3^{\,2} = 12\,(1 - \gamma_3^{\,2})$$

$$\beta_0 = (4 \times 3 - v_3^{\,2})/\,D \qquad = (\,12 - \gamma_3^{\,2})/D$$

$$\beta_1 = -\gamma_3\,(3 + 3)\;/\;D \qquad = -\gamma_3\,(6)/\,D \;=\; -6\,v_3/D$$

$$\beta_2 = (-2 \times 3 + 6 + 3\,\gamma_3^{\,2})/D = (-6 + 6 + 3\,\gamma_3^{\,2})/D = \;3\,\gamma_3^{\,2}/\,D$$

Si en las fórmulas de los parámetros auxiliares sustituimos los valores recién encontrados y ejecutamos las operaciones indicadas, obtendremos sus fórmulas específicas dentro del subsistema mesocúrtico. Como en este momento nos interesa más la generalidad del sistema pearsoniano que uno de sus subsistema específicos, dejaremos que el lector-estudiante obtenga las fórmulas específicas de esos parámetros auxiliares y, en caso de desearlo, también la que podría ser fórmula específica de las curvas del subsistema mesocúrtico (por substitución de las equivalencias de los parámetros auxiliares específicos en la fórmula del primer tipo principal de curva pearsoniana).

106

5.2 Caso Particular: Cuando la Ecuación de Segundo Grado tiene Dos Raíces Reales e Iguales.

Este caso se presenta cuando R es igual a cero. El trinomio, en este caso, se puede descomponer en tres factores (referencia 5.21):

1.-el coeficiente del cuadrado de equis (b_2)

2.-la diferencia de equis menos B (primera raíz) $(x-B)$

3.-la diferencia de equis menos "menos B" (segunda) $(x+B)$

Lo anterior se puede reducir al producto de dos factores;

1.-el coeficiente del cuadrado de equis (b_2)

2.-el cuadrado de "equis más B" $(x+B)^2$

conforme lo establece la referencia 5.211.

La forma derivada de la curva por interpolar será, entonces, la de la referencia 5.22.

Si en el numerador del segundo miembro de esa expresión agregamos y quitamos B, la expresión no se altera (5.221).

Si a equis más Be (x+B) lo representamos por equis mayúscula (X) y a "a menos Be mayúscula" (a-B) lo representamos por A mayúscula, tendremos la expresión 5.223.

107

Al integrar esa expresión obtenemos como primer miembro, el logaritmo natural de ye (integral del cociente de la derivada de la función entre la función) y, como segundo miembro, una integral (5.23) en la cual el facto constante $1/b_2$ puede salir del integrador (5.231)

El integrando es una fracción que puede ser descompuesta en dos fracciones-sumando, de denominador común equis mayúscula al cuadrado (X^2) y de numeradores equis mayúscula (X) y a mayúscula (A) (5.232). La primera fracción se reduce al recíproco de equis mayúscula.

La integración del recíproco de equis mayúscula ($1/X$) produce el logaritmo natural de equis mayúscula (Log X) y la integración del quebrado "a mayúscula entre equis mayúscula al cuadrado) ($A/(X^2)$) produce "menos a mayúscula sobre equis mayúscula" ($-A/X$) (5.233)

Finalmente, al tomar antilogaritmos naturales de los dos miembros de la expresión resultante, se obtiene la expresión del caso particular, dada por la referencia 5.24. En ella Y' (ye prima) procede del antilogaritmo natural de la constante de integración ce minúscula (c); equis mayúscula elevada al recíproco de be-dos ($1/b_2$) procede del altilogaritmo de "uno sobre be-dos, por el logaritmo natural de equis mayúscula" ($1/b_2$) Log X. Finalmente, e (base de los logaritmos naturales) elevado a "menos a mayúscula sobre be-dos por equis mayúscula" ($-A/(b_2X)$) es, pura y simplemente, el antilogaritmo natural de "menos A mayúscula sobre be-dos equis mayúscula" (e elevado a $-A/(b_2X)$

108

1 L A S C U R V A S S I M E T R I C A S.

1.1 L a B i n o m i a l S i m é t r i c a.

1.10 FRECUENCIA de la BINOMIAL.

$$f(S) = \binom{M}{S} p^S (1-p)^{M-S}$$

1.11 PENDIENTE de la BINOMIAL SIMETRICA.

1.110 Frecuencia de la Binomial Simétrica.

$$f(S) = \binom{M}{S} p^S \quad p^{M-S} \quad = \quad \binom{M}{S} \quad p^M$$

1.111 Frecuencia Inmediata Superior.

$$f(S+1)=\binom{M}{S+1} \quad p^M$$

1.112 Incremento

$$\Delta(S) = f(S+1) - f(S) =$$

$$= \binom{M}{S+1} p^M - \binom{M}{S} p^M =$$

$$= \left[\binom{M}{S+1} - \binom{M}{S}\right] p^M$$

1.113 Frecuencia Intermedia del Intervalo.

$$f(S+0.5) = \frac{f(S+1) + f(S)}{2} =$$

$$= \frac{\left[\binom{M}{S+1} + \binom{M}{S}\right] p^M}{2}$$

1.114 PENDIENTE

$$\frac{\Delta\ f(S)}{f(S+0.5)} = \frac{2\ p^M \left[\binom{M}{S+1} - \binom{M}{S}\right]}{p^M \left[\binom{M}{S+1} + \binom{M}{S}\right]}$$

1.1141

$$\binom{M}{S+1} = \binom{M}{S} \frac{M - S}{S + 1}$$

1.1142

$$\Delta\ f(S) = 2\ p^M \binom{M}{S} \left(\frac{M-S}{S-1} - 1\right) ;$$

$$f(S+0.5) = p^M \binom{M}{S} \left(\frac{M-S}{S-1} + 1\right)$$

1.1143

$$\frac{\Delta f(S)}{f(S+0.5)} = \frac{2\left(\frac{M-S-S-1}{S+1}\right)}{\left(\frac{M-S+S+1}{S+1}\right)} =$$

1.1144

$$= \frac{2(M-S-S-1)}{(M-S+S+1)} =$$

$$= \frac{2(M-2S-1)}{M+1} =$$

$$= \frac{2M-4S-2}{M+1} =$$

$$= \frac{4S+(2M-2)}{M+1}$$

112

1.115 Simplificación

$$\frac{x + a}{b}$$

1.116 Derivada

$$\frac{D_x y}{y}$$

1.117 Forma Diferencial de la Curva Contínua

$$\frac{D_x y}{y} = \frac{x + a}{b}$$

113

1.2 La Curva Normal.

1.21 EXPRESION INTEGRAL

1.211

$$I_x \frac{D_x y}{y} = I_x \frac{x + a}{b}$$

1.212
1.2121

$$I_x \frac{D_x y}{y} = \text{Log } y$$

1.2122

$$I_x \frac{x + a}{b} = \frac{1}{b}\left[\frac{x^2 + ax}{2}\right]$$

1.213

$$\text{Log } y = \frac{1}{b}\left[\frac{x^2 + ax}{2}\right]$$

114

1.214

$$y = e^{\left(\frac{x^2+2ax}{2b} + C\right)}$$

1.215

$$\boxed{y = y' \, e^{\frac{x^2+2ax}{2\,b}}}$$

1.22 PARAMETROS EN FUNCION DE MOMENTOS.

1.221 N = Efectivo de la distribución.

1.22101 $$v_n = \frac{x^n}{N}$$

1.22102

$$v_n = \frac{x^n\ y}{N}$$

1.22103

$$v_n = \underset{x}{I}\ x^n\ y$$

1.22104

$$b\ D_x\ y = y\ (x + a)$$

1.22105

$$b\ x^n\ D_x y = y\ x^n (x + a)$$

116

1.22106

$$I_x\, bx^n\, D_x y = I_x\, yx^n(x + a)$$

1.22107

$$= I_x(yx^{n+1} + ayx^n)$$

1.22108

$$= I_x\, yx^{n+1} + I_x\, ayx^n$$

1.22109

$$v_{n+1} + a\, v_n$$

1.22109 b

$$I_x\, bx^n\, D_x y = v_{n+1} + a\, v_n$$

1.22110

$$I_x b\, x^n D_x y = b\, I_x\, x^n D_x y =$$

1.22111

$$= b \left[x^n y - I_x\, n x^{n-1} y \right]$$

1.22112

$$= b \left[- \quad n v_{n-1} \right] =$$

$$= -b\, n\, v_{n-1}$$

1.22113

$$-b\, n\, v_{n-1} = v_{n+1} + a\, v_n$$

1.22114

$$v_{n+1} = -a\, v_n - b n v_{n-1}$$

$$-v_{n+1} = a\, v_n + b\, n\, v_{n-1}$$

1.222 Determinación de los Parámetros

1.2220

$$a\ v_n + b\ n\ v_{n-1} = -v_{n+1}$$

1.2221

$$a\ v_0 + b(0)v_{-1} = -v_1$$

1.2222

$$\underline{a\ v_1 + b(1)v_0 = -v_2}$$

1.2223

$$a = -v_1$$

1.2224 $$\underline{a\ v_1 + b\ v_o = -v_2}$$

1.223 Fórmulas de los Parámetros

1.2231

$$a = -v_1$$

1.2232 $$a\ v_1 + b = -v_2$$

1.2233 $$-v_1^2 + b = -v_2$$

1.2234 $$b = -v_2 + v_1^2$$

119

1.22311

$$y = y'' \, e^{-(d^2/2\,\mu_2)}$$

1.22312

$$y = y''' \, e^{-(\delta^2/2)}$$

FORMULAS BASICAS DE LA NORMAL

1.22313

$$\boxed{y = Y_o \, e^{-(\delta^2/2)}}$$

1.22314

$$\boxed{Y_o = \frac{N\,i}{\sqrt{2\,\pi\,\mu_2}}}$$

120

2 E L S I S T E M A A S I M E T R I C O

2.1 L a B i n o m i a l A s i m é t r i c a .

2.11 PENDIENTE DE LA ASIMETRICA

2.110 Frecuencia de la Binomial Asimétrica

$$f(S) = \binom{M}{S} p^{S} (1-p)^{M-S}$$

2.111 Frecuencia Inmediáta Superior

$$f(S+1) = \binom{M}{S+1} p^{S+1} (1-p)^{M-(S+1)}$$

2.112 Incremento

$$\Delta(S) = f(S+1) - f(S)$$

2.113 Frecuencia Intermedia

$$f(S+0.5) = \left[f(S+1) + f(S) \right] / 2$$

2.112 b Incremento

$$\Delta f(S) = \binom{M}{S} p^{S} (1-p)^{M-S} \left[1 - \frac{M-S}{S+1} p(1-p) \right]$$

2.113 b Frecuencia Intermedia

$$f(S+0.5) = \frac{1}{2} \binom{M}{S} p^{S} (1-p)^{M-S} \left[1 + \frac{M-S}{S+1} p(1-p) \right]$$

2.114 Pendiente

$$\frac{\text{Incremento}}{\text{Frecuencia Intermedia}} = \frac{\Delta f(S)}{f(S+0.5)}$$

2.115

$$\frac{\Delta f(S)}{f(S+0.5)} = \frac{2\left[1 - Mp(1-p) + S(1+p(1-p))\right]}{1 + Mp(1-p) + S(1-p(1-p))}$$

122

2.115 PENDIENTE

2.1151

$$\frac{D_x y}{y} = \frac{x + a}{bx + c}$$

2.1152

$$\frac{D_d y}{y} = \frac{d + A}{Bd + C}$$

2.1153

$$\frac{D_\delta y}{y} = \frac{\delta + \alpha}{\beta_1 o + \beta_0}$$

2.1154

$$\frac{D_\delta y}{y} = \frac{D - (\beta_0/\beta_1) + \alpha}{D - (\beta_0/\beta_1) + \beta_0}$$

2.1155

$$\frac{D_\delta y}{y} = \frac{D + A'}{\beta_1 D} = \frac{D}{\beta_1 D} + \frac{A'}{\beta_1 D} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{A'}{\beta_1 D}$$

2.116 Fórmula Diferencial del Sistema

$$\frac{D_\delta y}{y} = \frac{1}{\beta_1} \left(1 + \frac{A'}{D} \right)$$

123

2.2 Las Curvas Asimétricas Contínuas

2.21+ EXPRESION INTEGRAL

$$I_D \frac{D_D y}{y} = \frac{1}{\beta_1} I_D \left[1 + \frac{A}{D} \right]$$

2.211

$$\text{Log } y = \frac{1}{\beta_1} \left[I_D 1 + I_D \frac{A}{D} \right]$$

2.212

$$\text{Log } y = \frac{1}{\beta_1} (D + A \text{Log } D) + C$$

2.213

$$\boxed{y = Y \left(e^{D} D^{A} \right)^{1/\beta_1}}$$

+ En esta expresión, la D como subíndice del integrador (I) y del derivador indica la variable respecto de la que se integra y deriva. La otra D es el operador "Derivada de..."

Cálculo de Y

2.215 $$\int_{0}^{\infty} y \;=Y \int_{0}^{\infty} \left(e^{D} D^{A} \right)^{1/\beta_1}$$

2.2151 $$=Y \int_{0}^{\infty} e^{D/\beta_1} D^{A/\beta_1}$$

2.216 $$N \;=Y \int_{z=0}^{\infty} e^{-z} z^{A/\beta_1} (-\beta_1)^{A}$$

2.217 $$=Y(-\beta_1)^{(A/\beta_1+1)} \int_{0}^{\infty} e^{-z} z^{A/\beta_1}$$

2.218 $$=Y(-\beta_1)^{R}\, \Gamma(R)$$

2.219 $$\boxed{Y = \frac{N}{(-\beta_1)^{R}\, \Gamma(R)}}$$

125

2.22 PARAMETROS EN FUNCION DE MOMENTOS.

2.220

$$\alpha\gamma_n - n\,\beta_0\gamma_{n-1} - (n-1)\,\beta_1\gamma_n = -\gamma_{n+1}$$

2.2201

$$\alpha\gamma_0 - 0\,\beta_0\gamma_{-1} - 1\,\beta_1\gamma_0 = -\gamma_1$$

2.2202

$$\alpha\gamma_1 - 1\,\beta_0\gamma_0 - 2\,\beta_1\gamma_1 = -\gamma_2$$

2.2203

$$\alpha\gamma_2 - 2\,\beta_0\gamma_1 - 3\,\beta_1\gamma_2 = -\gamma_3$$

2.2204

$$\alpha - 0 - \beta_1 = 0$$

2.2205

$$0 - \beta_0 - 0 = -1$$

2.2206

$$\alpha - 0 - 3\,\beta_1 = -\gamma_3$$

2.2207

$$\alpha = -\beta_1$$

2.2208

$$\beta_0 = -1$$

2.2209

$$\beta_1 = -\gamma_3/2$$

126

2.2210 Fórmulas de los Parámetros Auxiliares (D, A, R)

2.2211

$$\boxed{D = \delta - \frac{1}{\beta_1}}$$

2.2212

$$\boxed{A = \beta_1 - \frac{1}{\beta_1}}$$

2.2213

$$\boxed{R = \frac{1}{\beta_1^{\,2}}}$$

127

3-5	E L S I S T E M A D E P E A R S O N
3	L A H I P E R G E O M E T R I C A Y E L S U B S I S T E M A S I M E T R I C O.
3.1	L a C u r v a H i p e r g e o m é t r i c a.
3.10	FORMULA DE LA HIPERGEOMETRICA.
3.101	Utilización de un solo Paquete de Cartas
3.1010	Probabilidad de obtener cero espadas en el paquete Paquetes I (único) Espadas o (no hay) Probabilidad $\frac{39}{52}$

129

3.1011 Probabilidad de obtener una espada en el paquete

Paquetes	I (único)
Espadas	x (hay)

Probabilidad $\frac{13}{52}$

130

3.102	Utilización de dos Paquetes de Cartas.	
3.1020	Probabilidad de obtener cero espadas en ambos	
	Paquetes I II	
	Espadas 0 0	
	Probabilidad $\frac{39}{52}$ $\frac{38}{51}$	
	Probabilidad total $\frac{39}{52} \times \frac{38}{51}$	
3.1021	Probabilidad de obtener una espada de uno de los paquetes	
	Paquetes I II	I II
	Espadas x 0	0 x
	Probabilidad $\frac{13}{52}$ $\frac{39}{51}$	$\frac{39}{52}$ $\frac{13}{51}$
	Probabilidad total $\frac{13}{52} \times \frac{39}{51}$	$\frac{39}{52} \times \frac{13}{51}$

Probabilidad de obtener una espada de cualquiera de los dos paquetes.

$$\frac{13 \times 39}{52 \times 51} \times 2$$

3.1022 Probabilidad de obtener una espada de cada uno (dos en total)

Paquetes	I	II
Espadas	x	x
Probabilidad	$\frac{13}{52}$	$\frac{12}{51}$

Probabilidad total

$$\frac{13}{52} \times \frac{12}{51}$$

132

3.103 Utilización de tres Paquetes de Cartas

3.1030 Probabilidad de obtener cero espadas en los tres

Paquetes	I	II	III
Espadas	0	0	0

Probabilidad

$$\frac{39}{52} \quad \frac{38}{51} \quad \frac{37}{50}$$

Probabilidad total

$$\frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50}$$

Arreglos posibles: (1)

Probabilidad del arreglo:

$$\frac{39 \times 38 \times 37}{52 \times 51 \times 50} \times 1$$

133

3.1031 Probabilidad de obtener una espada de uno de ellos

Paquetes	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Espadas	x	0	0	0	x	0	0	0	x
Probabilidad	$\frac{13}{52}$	$\frac{39}{51}$	$\frac{38}{50}$	$\frac{39}{52}$	$\frac{13}{51}$	$\frac{38}{50}$	$\frac{39}{52}$	$\frac{38}{51}$	$\frac{13}{50}$

Probabilidad total

$$\frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{38}{50} \qquad \frac{39}{52} \times \frac{13}{51} \times \frac{38}{50} \qquad \frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{13}{50}$$

Arreglos posibles (3)

Probabilidad de los tres arreglos
o probabilidad de obtener una espada de cualquiera de los
tres paquetes:

$$\frac{13 \times 39 \times 38}{52 \times 51 \times 50} \times 3$$

134

3.1032 Probabilidad de obtener dos espadas de un par cualquiera de los tres paquetes.

Paquetes	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Espadas	x	x	0	x	0	x	0	x	x
Probabilidad									
	$\frac{13}{52}$	$\frac{12}{51}$	$\frac{39}{50}$	$\frac{13}{52}$	$\frac{39}{51}$	$\frac{12}{50}$	$\frac{39}{52}$	$\frac{13}{51}$	$\frac{12}{50}$

Probabilidad total

$\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{39}{50}$ Deberá suplirlas el lector

Arreglos posibles (3)

Probabilidad de los tres arreglos
o probabilidad de obtener dos espadas de cualquier par de paquetes:

$$\frac{13 \times 12 \times 39}{52 \times 51 \times 50} \times 3$$

3.1033 Probabilidad de obtener una espada de cada uno de los tres paquetes.

Paquetes	I	II	III
Espadas	x	x	x

Probabilidad

$$\frac{13}{52} \quad \frac{12}{51} \quad \frac{11}{50}$$

Probabilidad total

$$\frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \times \frac{11}{50}$$

Arreglos posibles (1)

Probabilidad de obtener tres espadas de los tres paquetes

$$\frac{13 \times 12 \times 11}{52 \times 51 \times 50} \times 1$$

136

3.104 Utilización de cuatro Paquetes de Cartas.

3.1040 Probabilidad de obtener cero espadas

Paquetes	I	II	III	IV
Espadas	0	0	0	0

Probabilidad por paquete

$$\frac{38}{52} \quad \frac{37}{51} \quad \frac{36}{50} \quad \frac{35}{49}$$

Probabilidad total, igual al producto de las parciales:

$$\frac{38}{52} \times \frac{37}{51} \times \frac{36}{50} \times \frac{35}{49}$$

Arreglos posibles (1)

Probabilidad de no obtener espadas de ninguno de los cuatro paquetes:

$$\frac{38 \times 37 \times 36 \times 35}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \times 1$$

137

3.1041 Probabilidad de obtener una espada de uno de los cuatro paquetes

Paquetes	I	II	III	IV
Espadas	x	0	0	0

Probabilidad por paquete: $\frac{13}{52}$ $\frac{39}{51}$ $\frac{38}{50}$ $\frac{37}{49}$

Probabilidad total: $\frac{13 \times 39 \times 38 \times 37}{52 \times 51 \times 50 \times 49}$

Arreglos posibles $\binom{4}{1} = 4$

		Paquetes	I	II	III	IV	Probabilidad total (I, II, III, IV)
			Espadas (x)				
3.10411	ARREGLOS	Primero	x	0	0	0	$\frac{13}{52} \times \frac{39}{51} \times \frac{38}{50} \times \frac{37}{49}$
3.10412		Segundo	0	x	0	0	$\frac{39}{52} \times \frac{13}{51} \times \frac{38}{50} \times \frac{37}{49}$
3.10413		Tercero	0	0	x	0	$\frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{13}{50} \times \frac{37}{49}$
3.10414		Cuarto	0	0	0	x	$\frac{39}{52} \times \frac{38}{51} \times \frac{37}{50} \times \frac{13}{49}$

3.10415 Subsunción de las expresiones específicas de las probabilidades totales en una expresión genérica

$$\frac{13 \times 39 \times 38 \times 37}{52 \times 51 \times 50 \times 49}$$

3.10416 Posibles arreglos: $\binom{4}{1} = 4$

Probabilidad total de obtener una **espada** de cualquiera de los cuatro paquetes:

$$\frac{13 \times 39 \times 38 \times 37}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \times \binom{4}{1}$$

139

3.1042 Probabilidad de obtener dos espadas de un par de los cuatro paquetes disponibles

Probabilidad por Esquema: $\frac{13 \times 12}{52 \times 51} \times \frac{39 \times 38}{50 \times 49}$

Contribución de: las espadas; las no-espadas

3.1042 Esquemas o Arreglos Posibles:

3.1042 Paquetes:

	I	II	III	IV	
3.10421	x	x	0	0	1
3.10422	0	x	x	0	2
3.10423	0	0	x	x	3
3.10424	x	0	x	0	4
3.10425	0	x	0	x	5
3.10426	x	0	0	x	6

3.10427 Esquemas posibles: $6 = \binom{4}{2}$

3.10428 Probabilidad total de obtener dos espadas de dos(cualquiera) de los paquetes:

$$\frac{13 \times 12}{52 \times 51} \times \frac{39 \times 38}{50 \times 49} \times \binom{4}{2}$$

140

3.105 Generalizaciones

3.1051 Probabilidad total de obtener UNA espada de uno de los CUATRO paquetes:

$$\frac{E}{T} \times \frac{N}{T-1} \times \frac{N-1}{T-2} \times \frac{N-2}{T-3}$$

3.10511 Probabilidad total de obtener UNA espada de cualquiera de los CUATRO paquetes:

$$\binom{P}{S} \times \frac{E}{T} \times \frac{N\,(N-1)(N-2)}{(T-1)(T-2)(T-3)}$$

3.1052 Probabilidad de obtener DOS espadas

$$\binom{P}{S} \times \frac{E\,(E-1)}{T\,(T-1)} \times \frac{N\,(N-1)}{(T-2)(T-3)}$$

3.1053 Probabilidad de obtener TRES espadas

$$\binom{P}{S} \times \frac{E\,(E-1)\,(E-2)}{T\,(T-1)\,(T-2)} \times \frac{N}{T-3}$$

3.1054 Probabilidad de obtener CUATRO espadas

$$\binom{P}{S} \times \frac{E\,(E-1)\,(E-2)\,(E-3)}{T\,(T-1)\,(T-2)\,(T-3)}$$

141

3.106 Obtención de la Fórmula de la Hipergeométrica

3.1061

$$\binom{P}{S}\frac{E(E-1)\ldots(E-S+1)\quad N(N-1)\ldots(N-(P-S-1))}{T(T-1)\ldots(T-P+1)}$$

3.1062

$$\binom{P}{S}\frac{E(E-1)\ldots(E-S+1)\quad N(N-1)\ldots(N-\ P+S+1)}{T(T-1)\ldots(T-P+1)}$$

3.1063 a

$$\binom{P}{S} = \frac{P!}{S!\ (P-S)!}$$

3.1063 b

$$E(E-1)\ldots(E-S+1) = \frac{E!}{(E-S)!}$$

3.1064

$$N(N-1)\ldots(N-\ P+S+1) = \frac{N!}{(N-P+S)!}$$

3.1065

$$T(T-1)\ldots(T-P+1) = \frac{T!}{(T-P)!}$$

3.1066

$$\frac{1}{T(T-1)\ldots(T-P+1)} = \frac{(T-P)!}{T!}$$

3.1067 Equivalencia de la 3.1061

$$\frac{P!}{S!(P-S)!}\quad\frac{E!}{(E-S)!}\quad\frac{N!}{(N-P+S)!}\quad\frac{(T-P)!}{T!}$$

3.10691

$$\frac{P!}{S!(P-S)!} = \binom{P}{S}$$

3.10692

$$\frac{E!N!}{(E+N)!} = \frac{1}{\frac{(E+N)!}{E!N!}} = \frac{1}{\binom{E+N}{E}} \qquad \frac{1}{\binom{E+N}{E}}$$

3.10693

$$\frac{(T-P)!}{(E-S)!(N-P+S)!} = \frac{(E+N-P)!}{(E-S)!(NP+S)!} = \binom{E+N-P}{E-S}$$

3.10694

$$\binom{P}{S} \frac{1}{\binom{E+N}{E}} \binom{E+N-P}{E-S}$$

3.10695 Probabilidad de la Hipergeométrica

$$\frac{\binom{P}{S}\binom{E+N-P}{E-S}}{\binom{E+N}{E}}$$

3.10696 Probabilidad de la Hipergeométrica

$$\frac{\binom{P}{S}\binom{T-P}{E-S}}{\binom{T}{E}}$$

143

3.11 PENDIENTE DE LA HIPERGEOMETRICA

3.111 Frecuencias

3.1111 Probabilidad de obtener S espadas

$$y_x = \frac{\binom{P}{S}\binom{E+N-P}{E-S}}{\binom{E+N}{E}}$$

3.1112 Probabilidad de obtener S+1 espadas (frecuencia inmediata)

$$y_{x+1} = \frac{\binom{P}{S+1}\binom{E+N-P}{E-S-1}}{\binom{E+N}{E}}$$

Equivalencias

3.11121 $\binom{P}{S+1} = \frac{P-S}{S+1}\binom{P}{S}$

3.11122 Transformación de la segunda combinatoria del numerador de 3.1112 :

Nuevo elemento: E-S Diferencia: E+N-P-E+S+1 =N-P+S+1

$$\binom{E+N-P}{E-S-1} = \frac{E-S}{N-P+S+1}\binom{E+N-P}{E-S}$$

$$y_{x+1} = \left(\frac{P-S}{S-1}\,\frac{E-S}{N-P+S+1} - 1\right) y_x$$

144

3.112 Incremento

$$\Delta y = y_{x+1} - y_x$$

$$\Delta y = \left(\frac{P-S}{S+1}\,\frac{E-S}{N-P+S+1} - 1\right) y_x$$

3.113 Frecuencia intermedia

$$y_{x+0.5} = \tfrac{1}{2}(y_x + y_{x+1})$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(\frac{P-S}{S+1}\,\frac{E-S}{N-P+S+1} + 1\right) y_x$$

3.114 Determinación de la Pendiente de la Hipergeométrica:

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{Incremento}}{\text{Frecuencia Intermedia}}$$

$$= \frac{\Delta y}{y_{x+0.5}}$$

145

3.1141 Relación incremental

$$\frac{\Delta y}{y_{x+,5}} = \frac{(P-S)(E-S)-(S+1)(N-P+S+1)\ y_x}{0.5(P-S)(E-S)+(S+1)(N-P+S+1)\ y_x} =$$

3.1142

$$= \frac{2(P-S)(E-S)-(S+1)(N-P+S+1)}{(P-S)(E-S)+(S+1)(N-P+S+1)} =$$

3.1143

$$= \frac{2(PE-PS-ES+S^2-SN+SP-S^2-S-N+P-S-1)}{PE-PS-ES-S^2+SN-SP+S^2+S+N-P+S+1} =$$

3.1144

$$\frac{2\ [PE+P-N-1-S(E+N+2)]}{PE-P+N+1+S[(N-E)-2P+2] + 2S^2}$$

3.1145

$$\frac{2\ [PE+P-N-1-S(\ T+2\ )]}{(PE-P+N+1)+S[(N-E)-2P+2]+ 2S^2}$$

3.1146 División entre 2(T+2),del numerador:

$$\text{NUMERADOR} = \frac{PE + P - N - 1}{T + 2} - S$$

3.1151 Numerador

$$\frac{PE+P-N-1}{T+2}-x+\frac{1}{2} = \frac{PE+P-N-1+T+2}{T+2}\; x-\frac{1}{2}$$

$$\frac{PE+P+E+1}{T+2}-x-\frac{1}{2} = \frac{P(E+1)+E+1}{T+2}\; x-\frac{1}{2}$$

3.11510 Numerador= x + a

3.1152

$(PE-P+N+1)+S\,[(N-E)-2P+2] + 2S^2$

Equivalente del término en S^2: $2S^2 = 2(x-\frac{1}{2})^2 = 2(x^2-2.\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}^2) =$

$= 2x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

Equivalente del término en S: $S\,[(N-E)-2P+2] =$

$(x-\frac{1}{2})\,[(N-E)-2P+2] =$

$x\,[(N-E)-2P+2] - \frac{(N-E)-2P+2}{2}$

El término independiente de S queda incambiado.

147

3.11522 Términos en x^2: $2x^2$

Términos en x : $-2x$ (procede del término en S^2)

$x[(N-E)-2P+2]$ (procede del término en S)

Términos independientes de x: $+\frac{1}{2}$ (procede del término en S^2)

$-[(N-E)-2P+2]/2$ (procede del término en S)

$PE-P+N+1$ (procede el término inde - pendiente de S)

3.11523 Representación simplificada del denominador:

$$b_0 + b_1x + b_2x^2$$

3.1153 Pendiente

$$\frac{x + a}{b_0 + b_1x + b_2x^2}$$

148

3.110 EXPRESION GENERAL DEL SISTEMA PEARSONIANO

$$\frac{D_x y}{y} = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

149

3.12 PARAMETROS Y MOMENTOS

3.121 Relación Genérica

3.1211

$$(D_x y)(b_0+b_1x+b_2x^2) = y \quad (x + a)$$

3.1212 Multiplicación por x elevada a la n

$$x^n(b_0+b_1x+b_2x^2)(D_x y) = yx^n \ (x + a)$$

3.1213 Integración

3.12131

$$I_x \ \left[x^n(b_0+b_1x+b_2x^2)(D_x y\right] = I_x \ yx^n \ (x+ a)$$

3.12132

$$= I_x \ \left[yx^{n+1} + yx^n a\right]$$

De aquí en adelante, por comodidad, se pueden suprimir los subíndices "x" que han servido, hasta aquí, para indicar la variable de referencia en la derivación y la integración

3.12131 Integración del primer miembro

$$I \quad x^{n}(b_0+b_1x+b_2x^2)\,D_y =$$

$$= x^{n}(b_0+b_1x+b_2x^2)y \; - \; I\, yd[x^{n}(b_0 + b_1x + b_2x^2]$$

$$= \quad \text{Idem} \; - \; I\, yd(b_0x^{n} + b_1x^{n+1} + b_2x^{n+2}$$

$$= \quad \text{Idem} \; - \; I\, y[nb_0x^{n-1} + (n+1)b_1x^{n} + (n+2)b_2x^{n+1}]$$

Aproximadamente igual a:

$$- \; I\, y[nb_0x^{n-1} + (n+1)b_1x^{n} + (n+2)b_2x^{n+1}]$$

151

Continúa la integración del primer miembro

$$-\ I\ (nb_0x^{n-1}y + (n+1)b_1x^n + (n+2)b_2x^{n+1}) =$$

$$= -\ I\ nb_0x^{n-1} - I\ (n+1)b_1x^n - I\ (n+2)b_2x^{n+1} =$$

$$= -\ nb_0\mu'_{n-1} - (n+1)b_1\mu'_n - (n+2)b_2\mu'_{n+1}$$

3.12132 Integración del segundo miembro

$$I_x\ (yx^{n+1} + yx^nb\ ) = I_xyx^{n+1} + I_xyx^na =$$

$$= \mu'_{n+1} + \mu'_n$$

152

3.1214 Substitución en ambos miembros de la ecuación originaria (3.1213)

$$-nb_0\mu'_{n-1} - (n+1)b_1\mu'_n - (n+2)b_2\mu'_{n+1} = \mu'_{n+1} + a\mu'_n$$

3.12 5 Fórmula Genérica para la Obtención de los Parámetros del Sistema Pearsoniano

$$a\mu'_n + nb_0\mu'_{n-1} + (n+1)b_1\mu'_n + (n+2)b_2\mu'_{n+1} = -\mu'_{n+1}$$

153

3.122 Relación Específica para el Sistema

3.1221 Sistema de ecuaciones obtenidas por especificación de la fórmula pearsoniana.

(1) $a\mu'_0 + 0b_0\mu'_{-1} + 1b_1\mu'_0 + 2b_2\mu'_1 = -\mu'_1$

(2) $a\mu'_1 + 1b_0\mu'_0 + 2b_1\mu'_1 + 3b_2\mu'_2 = -\mu'_2$

(3) $a\mu'_2 + 2b_0\mu'_1 + 3b_1\mu'_2 + 4b_2\mu'_3 = -\mu'_3$

(4) $a\mu'_3 + 3b_0\mu'_2 + 4b_1\mu'_3 + 5b_2\mu'_4 = -\mu'_4$

3.1222 Simplificación cuando se emplean momentos respecto a la media aritmética.

3.12221 $\mu'_0 = 1 \quad \therefore \quad \mu'_1 - \mu_1 = 0$

3.12222 Transformaciones de:

$$a + b_1 = 0$$

$$b_0 + 3b_2\mu_2 = -\mu_2$$

$$a\mu_2 + \quad + 3b_1\mu_2 + 4b_2\mu'_3 = -\mu_3$$

$$a\mu_3 + 3b_0\mu'_2 + 4b_1\mu_3 + 5b_2\mu_4 = -\mu_4$$

154

3.1223 **Empleo de los momentos con respecto a la media en unidades de la desviación cuadrática media**

3.12231

$$\mu_2 \text{ se convierte en } \gamma_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = \frac{\mu_2}{\mu_2} = 1$$

$$\mu_3 \text{ se convierte en } \gamma_3 = \left(\frac{\mu_3^2}{\sigma^6}\right)^{1/2} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \sqrt{\beta_1} \text{ de Pearson}$$

$$\mu_4 \text{ se convierte en } \gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \beta_2 \text{ de Pearson}$$

3.12232 Transformaciones de la:

(1) $\alpha + \beta_1 = 0$

(2) $\beta_0 + 3\beta_2 = -1$

(3) $\alpha + 3\beta_1 + 4\beta_2\gamma_3 = -\gamma_3$

(4) $\alpha\gamma_3 + 3\beta_0 + 4\beta_1\gamma_3 + 5\beta_2\gamma_4 = -\gamma_4$

155

3.1220 Fórmulas de los Parámetros

3.1224 Subsistema de curvas simétricas $(v_3 = 0)$.

$$\alpha + \beta_1 = 0 \quad (1) \qquad \beta_0 + 3\beta_2 = -1 \quad (2)$$

$$\alpha + 3\beta_1 = -0 \quad (3) \qquad 3\beta_0 + 5\beta_2\gamma_4 = -\gamma_4 \quad (4)$$

3.1225 Despeje de los valores de los parámetros

$$\alpha = -\beta_1 \qquad \beta_0 = -1 - 3\beta_2$$

$$-\beta_1 + 3\beta_1 = 0 \qquad 3(-1-3\beta_2)+5\beta_2\gamma_4 = -\gamma_4$$

$$2\beta_1 = 0 \qquad -3-9\beta_2+5\beta_2\gamma_4 = -\gamma_4$$

$$\therefore \beta_1 = 0 \qquad \beta_2(-9 + 5\gamma_4) = -\gamma_4 + 3$$

$$\therefore \alpha = -\beta_1 = 0 \qquad \beta_2 = \frac{-\gamma_4 + 3}{-9 + 5\gamma_4}$$

$$\beta_2 = \frac{-\gamma_4 + 3}{5\gamma_4 - 9}$$

$$\beta_0 = -1 - 3\,\frac{-\gamma_4 + 3}{5\gamma_4 - 9}$$

$$\beta_0 = \frac{-2\gamma_4}{5\gamma_4 - 9}$$

156

3.2 EL SUBSISTEMA DE CURVAS SIMETRICAS

3.21

$$\frac{D_\delta y}{y} = \frac{\delta + \alpha}{\beta_0 + \beta_1\delta + \beta_2\delta^2}$$

$$\frac{D_\delta y}{y} = \frac{\delta}{\beta_0 + \beta_2\delta^2}$$

Integración

$$\text{Log } y = \frac{1}{2\beta_2}\left[\text{Log}(\delta+D) + \text{Log}(\delta-D)\right] + C$$

Forma Antilogarítmica

$$y = \left[(\delta+D)(\delta-D)\right]^{1/2\beta_2} e^{C}$$

Fórmulas Fundamentales

$$y = y'(\delta^2 - D^2)^{1/2\beta_2}$$

$D^2 = \beta_0/\beta_2$ $\qquad$ $1/2\beta_2 = a$ (para comodidad)

3.211 Fórmula del parámetro y' en el Subsistema de Curvas Simétricas

$$y = y'D^{2a} \left(1-\frac{\alpha^2}{D^2}\right)^a d\delta$$

$$Sf = y'D^{2a} \int_0^{\infty} \left(1-\frac{\delta^2}{D^2}\right)^a d\delta$$

Cambio de variable:

$$\left(1-\frac{\delta^2}{D^2}\right)^a = z^a$$

Límites: Si δ infinito, $z = 0$
Si δ nulo, $z = 1$

Valor del factor diferencial

$$D^2-\delta^2 = D^2 z \quad \therefore \quad -\delta^2 = D^2(z-1)$$

$$\delta^2 = -D^2(z-1)$$

$$\delta^2 = D^2(1-z)$$

$$\delta = D\,(1-z)^{\frac{1}{2}}$$

$$d\delta = \frac{D}{2}\,(1-z)^{\frac{1}{2}}(-1)\,dz$$

158

$$S\ f = y' D^{2a+1} (-1) \int_0^1 z^a (1-z)^{-\frac{1}{2}}\, dz$$

$$S\ f = y' D^{2a+1} (-1)\ B[(a+1), (\tfrac{1}{2})]$$

$$S\ f = y' D^{2a+1} (-1)\ \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a+1\frac{1}{2})}$$

$$S\ f = y' D^{2a+1}\ \frac{\Gamma(a+1)\sqrt{\pi}}{\Gamma(a+1\frac{1}{2})}$$

$$y' = \frac{S\ f}{D^{2a+1}\sqrt{\pi}}\ \frac{\Gamma(a+1\frac{1}{2})}{\Gamma(a+1)}$$

159

4.1 Los Dos Tipos Principales de Curva Pearsoniana.

4.10 PENDIENTE

4.11

$$D_x y = \frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}$$

4.12 TRINOMIO DEL DENOMINADOR

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0$$

4.13 RAICES DEL TRINOMIO

$$X = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - 4\, b_0 b_2}}{2b_2}$$

4.14

$$b_1^2 \neq 4\, b_o b_2$$

4.110 DESCOMPOSICION DEL TRINOMIO EN FACTORES

4.111

$$b_2$$

4.112

$$X - \left[\frac{-b_1}{2b_2} + \frac{\sqrt{b_1^2 - 4\ b_0 b_2}}{2b_2} \right]$$

4.113

$$X - \left[\frac{-b_1}{2b_2} - \frac{\sqrt{b_1^2 - 4\ b_0 b_2}}{2b_2} \right]$$

4.114

$$\frac{b_1}{2b_2} = B$$

162

4.1142

$$\frac{\sqrt{b_1^{2} - 4\ b_0 b_2}}{2b_2} = R$$

4.115

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \quad = b_2(x + B - R)(x + B + R)$$

163

4.12 DISCUSION DE LA FORMULA

4.121

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = b_2(x+B-Ri)(x+B+Ri)$$

4.122

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = b_2(X - R)(X + R)$$

4.123

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = b_2(X -Ri)(X +Ri)$$

4.124

$$X = x + \frac{b_1}{2b_2}$$

4.125

$$R = \frac{\sqrt{b_1^{\,2} - 4\, b_0 b_2}}{2b_2}$$

4.126 $$x + a = x + B - B + a =$$

4.127 $$= X - B + a =$$

4.128 $$= X + A$$

4.129 si se define: $$A = a - B$$

4.13 INTEGRACION DE LA FORMULA

4.1301

$$I_x(D_x \text{Log} \quad y) = I_x \left[\frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \right]$$

4.1302

$$\text{Log} \quad y = I_x \left[\frac{x + a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} \right]$$

4.131 Cuando las Raíces son Reales

4.1311

$$I_x \left[\frac{X + A}{b_2 (X - R)(X + R)} \right]$$

4.1312

$$\frac{1}{b_2} \; \frac{X + A}{(X - R)(X + R)}$$

165

4.1313 Descomposición en Fracciones Parciales para Integrar

4.13131

$$\frac{X + A}{(X - R)(X + R)} = \frac{D}{X + R} + \frac{E}{X - R}$$

4.13132 Equivalente de X + A

$$X + A = D(X-R) + E(X+R) = DX - DR + EX + ER = X(D+E)+ER-DR$$

$$D+E = 1$$

$$\therefore D = 1-E$$

4.13132(1) Equivalente de E

$$ER - DR = A$$
$$R(E- D) = A$$
$$E- D = A/R$$
$$E-1+E = A/R$$
$$2E-1 = A/R$$
$$2E =(A/R)+1=(A+R)/R$$
$$E = (A+R)/2R$$

4.13132(2) Equivalente de D

$$D = 1 - E$$
$$D = 1 - (A+R)/2R$$
$$D = 2R- A+R)/2R$$
$$D =(R- A) /2R$$

4.13133

$$\frac{X + A}{(X - R)(X + R)} = \frac{R - A}{2R(X + R)} + \frac{R + A}{2R(X - R)}$$

4.1314 **Integración de las Fracciones Parciales**

$$I_x \, (D_x \text{ Log } y) = \frac{1}{b_2} \, I_X \left[\frac{R - A}{2(X + R)R} + \frac{R + A}{2(X - R)R} \right]$$

4.13141

$$\text{Log } y = \frac{1}{b_2} \left[\frac{R-A}{2R} \text{ Log}(X+R) + \frac{R+A}{2R} \text{ Log}(X-R) \right]$$

167

4.1315 Resultados en Forma Antilogarítmica

4.13151

$$e \text{ elevada a } \operatorname{Log} y = e \text{ elevada a} \left[\frac{1}{b_2} \frac{R-A}{2R} \operatorname{Log}(X+R) + \frac{R+A}{2R} \operatorname{Log}(X-R) \right] + C =$$

4.13152

$$= \left[e \text{ elevada a } \frac{1}{b_2} \frac{R-A}{2R} \operatorname{Log}(X+R) \right] \left[e \text{ elevada a } \frac{1}{b_2} \frac{R+A}{2R} \operatorname{Log}(X-R) \right] \left[e \text{ elevada a } C \right]$$

168

4.13153 Equivalencias de las exponenciales

e elevada a Log y = y

e elevada a $\frac{1}{b_2} \frac{R+A}{2R}$ Log(X+R) = (X+R) elevado a $\frac{1}{b_2} \frac{R+A}{2R}$

e elevada a $\frac{1}{b_2} \frac{R-A}{2R}$ Log(X-R) = (X-R) elevado a $\frac{1}{b_2} \frac{R-A}{2R}$

e elevada a C = Antilog C = y' (por convención)

4.1316 FORMULA DE PEARSON CUANDO LAS RAICES SON REALES

$$y = y' \, (X + R)^{\frac{1}{b_2} \frac{R+A}{2R}} \cdot (X - R)^{\frac{1}{b_2} \frac{R-A}{2R}}$$

169

4.317 **Fórmulas Alternativas del Primer Tipo de Curva**

4.31711 $\frac{1}{b_2}\frac{(A-R)}{(-2R)}$

4.31712 $\frac{1}{b_2}\frac{(-A-R)}{(-2R)}$

4.3171

$$y = y_1\,(X-R)^{(A-R)/b_2(-2R)}\,(X+R)^{(-A-R)/b_2(-2R)}$$

4.31720 4.31721 4.31722 4.31723

$A = -a - B$; $A-R = -a-B-R$; $-A-R = +a+B-R$; $X = x - B$

4.3172

$$y = y_1\,(x-B-R)^{(-B-R-a)/b_2(-2R)}\,(x-B+R)^{(+B-R+a)/b_2(-2R)}$$

4.31731 4.31732 4.31733

$-B-R = A_1$; $-B+R = A_2$; $A_1 + A_2 = -B-R+B-R = -2R$

4.3173

$$y = y_1\,(x+A_1)^{(A_1-a)/b_2(A_1+A_2)}\,(x-A_2)^{(A_2+a)/b_2(A_1+A_2)}$$

170

4.31761

$$y_1 \quad a_1^{e_1} \quad a_2^{e_2} = y_o$$

4.3176

$$y = y_0 \left(1 + \frac{X'}{a_1} \right)^{a_1/b_2(a_1+a_2)} \left(1 - \frac{X'}{a_2} \right)^{a_2/b_2(a_1+a_2)}$$

171

4.2 F ó r m u l a s   d e   l o s   P a r á m e t r o s

4.21 EL SISTEMA DE ECUACIONES

4.211 $a + b_1 = 0$

4.212 $b_0 + 3b_2\mu_2 = -\mu_2$

4.213 $a\mu_2 + 3b_1\mu_2 + 4b_2\mu_3 = -\mu_3$

4.214 $a\mu_3 + 3b_0\mu_2 + 4b_1\mu_3 + 5b_2\mu_4 = -\mu_4$

4.22 EQUIVALENCIAS DE a y b_0

4.221 $a = -b_1$

4.222 $b_0 \quad :- \quad = -3b_2\mu_2 = -\mu_2$

$= -\mu_2(3b_2 + 1)$

172

4.223

$$-b_1\mu_2 \quad + 3b_1\mu_2 + 4b_2\mu_3 = -\mu_3$$

$$2b_1\mu_2 \quad + 4b_2\mu_3 = -\mu_3$$

4.224

4.2241 $-b_1\mu_3 - 3\mu_2^2(1+3b_2) + 4b_1\mu_3 + 5b_2\mu_4 = -\mu_4$

4.2241 $3b_1\mu_3 - 3\mu_2^2 - 9b_2\mu_2^2 + 5b_2\mu_4 = -\mu_4$

4.2243 $3b_1\mu_3 - 3\mu_2^2 + b_2(-9\mu_2^2 + 5\mu_4) = -\mu_4$

4.3 EQUIVALENCIAS DE b_1 y b_2

4.231

$$2b_1\mu_2 \quad + 4b_2\mu_3 = -\mu_3$$

4.232

$$3b_1\mu_3 \quad + b_2(5\mu_4 - 9\mu_2^2) = -\mu_4 + 3\mu_2^2$$

173

4.24 FORMULAS DE LOS CUATRO PARAMETROS

4.240

$$\begin{vmatrix} 2\mu_2 & 4\mu_3 \\ 3\mu_3 & 5\mu_4 - 9\mu_2^{\ 2} \end{vmatrix} = 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^{\ 2} - 12\mu_3^{\ 2} = D$$

4.241 Valor de b_1:

4.2411
4.2412

$$\frac{\begin{vmatrix} -\mu_3 & 4\mu_3 \\ 3\mu_2 - \mu_4 & 5\mu_4 - 9\mu_2^{\ 2} \end{vmatrix}}{D} = \qquad b_1 = \frac{-5\mu_3\mu_4 + 9\mu_3\mu_2^{\ 2} - 12\mu_3\mu_2^{\ 2} + 4\mu_3\mu_4}{D}$$

$$b_1 = \frac{-\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^{\ 2})}{D}$$

4.242

$$\frac{\begin{vmatrix} 2\mu_2 & -\mu_3 \\ 3\mu_3 & 3\mu_2^{\ 2} - u_4 \end{vmatrix}}{D} = \qquad b_2 = \frac{6\mu_2^{\ 3} - 2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^{\ 2}}{D}$$

174

4.243

$$a = -b_1 = -\left[\frac{-\mu_3(\mu_4+3\mu_2^2)}{D}\right]$$

4.244

$$a = \frac{\mu_3(\mu_4+3\mu_2^2)}{D}$$

4.2441

4.2442

$$b_0 = -\mu_2(1 + 3\, b_2) =$$

$$= -\mu_2\left[1 + 3\,\frac{6\mu_2^3-2\mu_2\mu_4+3\mu_3^2}{D}\right]$$

$$= -\mu_2\,\frac{10\mu_2\mu_4-18\mu_2^3-12\mu_3^2+18\mu_2^3-6\mu_2\mu_4+9\mu_3^2}{D}$$

$$b_0 = -\mu_2\left[\frac{4\mu_2\mu_4+3\mu_3^2}{D}\right]$$

175

4.132 Cuando las Raíces son Complejas

4.1321 Forma Derivada

4.13211

$$D_x \text{ Log } y = \frac{X + A}{b_2(X +-Ri)(X - Ri)} =$$

$$\frac{X + A}{b_2(X^2 + R^2)}$$

4.1322 Integración

$$\text{Log } y = \frac{1}{b_2} \underset{X}{I} \left[\frac{X}{X^2 + R^2} + \frac{A}{X^2 + R^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{b_2} \left[\frac{X}{X^2+R^2} + \frac{A}{X^2+R^2}. \right]$$

176

4.1322

4.13221

$$\frac{X}{X^2+R^2} = \frac{\mathrm{Log}\ (X^2+R^2)}{2}$$

4.13222

$$\frac{A}{X^2+R^2} = \frac{A}{R} \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

4.13223

$$\mathrm{Log}\ y = \frac{1}{b_2}\left[\frac{\mathrm{Log}\ (X^2+R^2)}{2} + \frac{A}{R} \tan^{-1} \frac{X}{R}\right] + C$$

4.13230 Antilogaritmos:

Antilog y (o e elevado a Log y) = y

$$\text{Antilog} \frac{1}{b_2} \frac{\text{Log}(X^2+R^2)}{2} = (X^2+R^2) \text{ elevada a } \frac{1}{b_2} x \frac{1}{2}$$

$$\text{Antilog} \frac{1}{b_2} \frac{A}{R} \tan^{-1} \frac{X}{R} = e \text{ elevada a } \frac{1}{b_2} \frac{A}{R} \tan^{-1} \frac{X}{R}$$

4.1323 FORMULA DE PEARSON CUANDO LAS RAICES SON COMPLEJAS

$$y = y' \cdot (X^2 + R^2)^{\frac{1}{2b_2}} \cdot e^{\frac{A}{Rb_2} \tan^{-1} \frac{X}{R}}$$

178

4.3 El Parámetro y'

4.31 Y' CUANDO LAS RAICES SON REALES.

4.310

$$y = y'(X + R)^m (X - R)^M \, dX$$

4.311 Efectivo de la Distribución:

4.3111

$$S\,f = \int_{-R}^{R} y'(X + R)^m (X - R)^M \, dX$$

4.3112

$$S\,f = y' \int_{-R}^{R} (X + R)^m (X - R)^M \, dX$$

179

4.312 Cambio de Variable (Z)

4.3121 Equivalente de X+R

4.31211
4.31212 $\frac{X+R}{2R} = Z \therefore X+R = 2RZ$

4.31213 Equivalente de dX

4.31214 $X = 2RZ-R \therefore dX = 2RdZ$

4.31215 Equivalente de X-R

$X-R=X-R+R-R=2RZ-2R= 2R(Z-1)$

4.3122

$$Sf = y'(-1)^{M} I_{-R}^{R}(X+R)^{m}(R-X)^{M}dX$$

Limites para X=2RZ-R

$R=2RZ-R \therefore Z=2R/2R = 1$

$-R=R-2RZ \therefore Z= 0/2R = 0$

4.3123

$$S f =y'(-1)^{M} I_{0}^{1}\left[(2RZ)^{m}[2R(1-Z)]^{M}2RdZ\right]$$

4.313 Intervención de la Función Beta Mayúscula

4.3131

$$S\ f = y^{1}(-1)^{M} \int_{0}^{1} (2R)^{m+M+1} Z^{m} (1-Z)^{M} dZ$$

4.3132

$$= y^{1}(-1)^{M}(2R)^{m+M+1} \int_{0}^{1} Z^{m}(1-Z)^{M} dZ$$

4.31321

$$\int_{0}^{1} Z^{m}(1-Z)^{M} dZ = \overline{B(m+1)(M+1)}$$

4.31322

$$= y^{1}(-1)^{M}(2R)^{m+M+1}\ \overline{B(m+1)(M+1)}$$

181

4.314 Despeje de y^i

4.3141

$$y^i = \frac{S\,f}{(-1)^M\,(2R)^{m+M+1}}\;\frac{1}{B[(m+1),\,(M+1)]}$$

4.3142 Equivalencia aclaratoria

$$B[A\,,\,B] = \frac{\Gamma(A)\,\Gamma(C)}{\Gamma(A+C)}$$

4.3143

$$y^i = \frac{S\,f}{(-1)^M\,(2R)^{m+M+1}} \div \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(M+1)}{\Gamma[(m+1)+(M+1)]}$$

182

4.31741		4.31742	4.31743
	$x + a - a = X' - a;$	$A_1 - a = a_1;$	$-A_2 - a = -a_2$
4.31744			
	$A_1 + A_2 = a_1 + a + a_2 - a = a_1 + a_2$		
4.3174			
	$y = y_1(X' + a_1)^{a_1/b_2(a_1+a_2)}\,(X' - a_2)^{a_2/b_2(a_1+a_2)}$		
4.317511	$a_1/b_2(a_1+a_2) = e_1$	4.317512 $a_2/b_2(a_1+a_2) = e_2$	
4.31751	$(X + a_1)^{e_1} = \left(\frac{X'}{a_1} + \frac{a_1}{a_1}\right)^{e_1} (a_1)^{e_1}$		
4.31752	$(X' - a_2)^{e_2} = \left(\frac{X'}{-a_2} - \frac{a_2}{-a_2}\right)^{e_2} (-a_2)^{e_2}$		
4.3175	$y = y_1\left(1 + \frac{X'}{a_1}\right)^{e_1}\left(1 - \frac{X'}{a_2}\right)^{e_2} a_1^{e_1} (-a_2)^{e_2}$		

4.315 Fórmula de y^i cuando las raíces son reales.

$$y^i = \frac{S\ f}{(-1)^M (2R)^{m+M+1}} \frac{\Gamma(m+M+2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(M+1)}$$

184

4.32 y' CUANDO LAS RAICES SON COMPLEJAS

4.321 Primer Cambio

4.3211

$$y = y' \, (X^2+R^2)^n \, e^{N \tan^{-1}(X/R)}$$

4.3212 y
4.3213

$n = 1/2b_2$; $N = A/Rb_2$

4.3214

$$y = y' \left(\frac{X^2}{R^2}+1\right)^n (R^2)^n \, e^{N\tan^{-1}(X/R)}$$

4.322

$\tan^{-1}(X/R) = \alpha$ $(X/R) = \tan \alpha$

4.3221 y
4.4222

$$\left(\frac{X^2}{R^2} + 1\right) = \tan^2\alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

4.3223 $N \tan^{-1}(X/R) = N\alpha$

4.3224

$$y = y' R^{2n} (\sec^2 \alpha)^n e^{N\alpha}$$

4.3225

$$y = y' R^{2n} (\sec \alpha)^{2n} e^{N\alpha}$$

4.3226

$$y = y'' (\sec \alpha)^{2n} e^{N\alpha}$$

4.323 Tercer Cambio

4.3231 $\tan \alpha = X/R \therefore X = R \tan \alpha$

4.3232

4.3233 $dX = d(R\tan \alpha) =$

4.32341 $= R\, d \tan o = R \sec^2 \alpha\, d\alpha =$

4.32342 $= R(\text{coseno}\ \alpha)^{-2}\, d\alpha$

4.3235

$$y = y'' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sec \alpha)^{2n} e^{N\alpha} R (\cos \alpha)^{-2}\, d\alpha$$

186

4.324 Cuarto Cambio

4.3401

$$y = y''R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{(\cos \alpha)^{-2n}}{(\cos \alpha)^{2}} \, e^{N\alpha} \, d\alpha \right]$$

4.3402

$$y = y''' \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos \alpha)^{-2n-2} \, e^{N\alpha} \, d\alpha \right]$$

 187

4.325 Quinto Cambio

4.3251 si $\alpha + \beta = \pi/2$, $\beta = (\pi/2) - \alpha$, $\alpha = (\pi/2) - \beta$

4.3252 $d\alpha = d[(\pi/2) - \beta] = -db$

4.3253
$$y = y''' \int_0^{\pi} \left[(\operatorname{sen} \beta)^{-2n-2} e^{N(\pi/2-\beta)} d\beta(-1) \right] =$$

4.3254
$$= y''' e^{N(\pi/2)} \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} \beta)^{-2n-2} e^{N\beta} d\beta$$

4.3255
$$y = y^{iv} F[(-2n-2), N]$$

188

4.326 Fórmula de y' cuando las raíces son complejas ($y' = y^{iv}$)

$$y' = \frac{y}{F[(-2n-2), N]}$$

El valor de la función F puede encontrarse en tablas que han sido preparadas especialmente para facilitar los cálculos

189

FORMULAS PARA LA INTERPOLACION DE LOS TIPOS PRINCIPALES DE CURVA DE PEARSON

Primer Paso:

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4$$

Segundo paso:

$$D = 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^{3} - 12\mu_3^{2}$$

$$b_0 = \frac{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^{2})}{D}$$

$$b_1 = \frac{-\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^{2})}{D} = -a$$

$$b_2 = \frac{-2\mu_2\mu_4 + 6\mu_2^{3} + 3\mu_3^{2}}{D}$$

190

Tercer paso:

$$¿b_1^2 > 4b_0b_2? \quad / \quad ¿b_1^2 < 4b_0b_2?$$

Cuarto paso:

$$R = \frac{\sqrt{b_1^2 - 4b_0b_2}}{2\,b_2} \quad ; \quad A = a - \frac{b_1}{2b_2}$$

$$m = \frac{1}{b_2}\,\frac{R - A}{2R} \qquad M = \frac{1}{b_2}\,\frac{R + A}{2R}$$

$$n = \frac{1}{2b_2} \qquad N = \frac{1}{b_2} \times \frac{A}{R}$$

Quinto paso:

$$y = y'(X + R)^m (X - R)^M \qquad y = y'(X^2 + R^2)^n\, e^{N\tan^{-1}(X/R)}$$

191

FORMULAS PARA LA INTERPOLACION DE LOS TIPOS PRINCIPALES DE CURVA DE PEARSON

Primer paso:

$$v_1, \mu_2, \gamma_3, \gamma_4$$

Segundo paso:

$$D = 10\ \gamma_4 - 18\ \ -12\gamma_3^{2}$$

$$\beta_0 = \frac{(4\ \gamma_4 - \ \gamma_3^{2})}{D}$$

$$\beta_1 = \frac{-\gamma_3(\gamma_4 + 3)}{D} = -a$$

$$\beta_2 = \frac{-2\ \gamma_4 + 6\ \ + 3\gamma_3^{2}}{D}$$

192

Tercer paso:

$$¿\beta_1^{2} \quad 4\beta_0\beta_2? \quad / \quad ¿\beta_1^{2} \quad 4\beta_0\beta_2?$$

Cuarto paso:

$$R = \frac{\sqrt{\beta_1^{2} - 4\beta_0\beta_2}}{2\beta_2} \; ; \; A = a - \frac{b_1}{2\beta_2}$$

$m = \frac{1}{\beta_2} \frac{R - A}{2R}$	$n = \frac{1}{2\beta_2}$
$M = \frac{1}{\beta_2} \frac{R + A}{2R}$	$N = \frac{1}{\beta_2} \times \frac{A}{R}$

Quinto paso:

$$y = \Upsilon(\chi + R)^{m}(\chi - R)^{M}$$

$$y = \Upsilon(\chi^2 + R^2)^{n}\, e^{N\tan^{-1}(\chi/R)}$$

193

4.4 Procedimiento Práctico de Interpolación (Curva I)

4.411

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad \gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

4.4121

$$b_2 = \frac{2\,\gamma_4 - 3\,\gamma_3^{\,2} - 6}{2(\,5\,\gamma_4 - 6\,\gamma_3^{\,2} - 9\,)}$$

4.4122

$$1/b_2 = B$$

4.413

$$B + 2\,, \qquad B + 3\,, \qquad B + 4\,, \qquad (B + 4)^2$$

4.4141

$$a_1 + a_2 = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\gamma_3^{2} (B + 4)^{2} + 16 (B + 3)}$$

4.4142

$$e_1 , e_2 = \frac{1}{2} \quad B \pm \frac{(B + 2) \quad (B + 4)}{2 (a_1 + a_2)}$$

4.4143

$$y_o = \frac{N}{a_1 + a_2} \; \frac{e_1^{\,e_1} \; e_2^{\,e_2}}{(e_1 + e_2)^{e_1 + e_2}} \; \frac{\Gamma(e_1 + e_2 + 2)}{\Gamma(e_1 + 1) \; \Gamma(e_2 + 1)}$$

4.415

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{a_1} \right)^{e_1} \left(1 - \frac{x}{a_2} \right)^{e_2}$$

195

5.2 Caso Particular: Ecuación con Dos Raíces Reales e Iguales

5.21

$b_o + b_1x + b_2x^2$, cuando R=0: $b_2(x + B)\ (x + B) =$

$= b_2(x + B)^2$

5.211

5.22

$$\frac{D_x y}{y} = \frac{x + a}{b_2\ (x + B)^2} =$$

5.221

$$= \frac{x + B - B + a}{b_2\ (x + B)^2} =$$

5.222

$$= \frac{X \quad + \quad A}{b_2 \quad X^2}$$

197

5.23

$$\mathrm{Log}\ y = I_X \left[\frac{1}{b_2} \quad \frac{X + A}{X^2} \right]$$

5.231

$$\frac{1}{b_2} I_X \left[\frac{X + A}{X^2} \right]$$

5.232

$$\frac{1}{b_2} \left[I\frac{1}{X} + I\frac{A}{X^2} \right]$$

5.233

$$\frac{1}{b_2} \mathrm{Log}\ X - \frac{A}{b_2 X} + C$$

198

5.24

$$\boxed{Y = Y' X^{1/b_2} e^{-A/b_2 X}}$$

199

1. 2 2 4		INTERPOLACION DE UNA CURVA NORMAL				
1. 2 2 4 0 Datos de la Serie por Interpolar		1. 2 2 4 1 Cálculo de μ_2				1. 2 2 4 2 Cálculo de Y_0
		1.22411	1.22412	1.22413		
M	f	M f	d	d^2	d^2f	Y_0+
60	9	540	-90	8 1000	72 900	
81	20	1 620	-69	4 761	95 220	
102	33	3 366	-48	2 304	76 032	$= \dfrac{N\ i}{\sqrt{2\pi\mu_2}} =$
123	47	5 781	-27	729	34 263	
144	55	7 920	- 6	36	1 980	

201

M	f	M f	d	d^2	d^2f	$Y_0=$
165	52	8 580	15	225	11 700	
186	39	7 254	36	1 296	50 544	$= \frac{300 \times 21}{2.5 \times 46} =$
207	26	5 382	57	3 249	84 474	
229	12	2 748	79	6 241	74 892	
249	5	1 445	99	9 801	49 005	
270	2	540	120	14 400	88 800	
	300	45 176				$\boxed{Y_0 = 55}$
1.22411	$\boxed{\bar{x}_a = 150.39}$					

202

=202

1. 2 2 4	INTERPOLACION DE UNA CURVA NORMAL
1. 2 2 4 3	$Y = Y_0 \, e^{-\delta^2/2} = 55 \, e^{-\delta^2/2}$
1. 2 2 4 4	Cálculo de las yes teóricas

δ	δ^2	$-\delta^2/2$	$e^{-\delta^2/2}$	$Y_0 \, e^{-\delta^2/2}$
-1.96	3.8416	-1.92	0.146607	8
-1.50	2.5500	-1.13	0.323033	17
-1.04	1.0816	-0.54	0.582748	32
-0.58	0.3369	-0.17	0.843665	46

203

δ	δ^2	$-\delta^2/_2$	$e^{-\delta^2/_2}$	$Y_0 \; e^{-\delta^2/2}$
-0.13	0.0169	-0.08	0.990050	54
0.33	0.1089	-0.05	0.951229	52
0.79	0.6241	-0.31	0.733447	40
1.24	1.5376	-0.87	0.418952	23
1.72	2.9584	-1.43	0.239309	13
2.15	4.6225	-2.31	0.099261	5
2.61	6.8121	-3.41	0.033041	1
			T A B L A S	

204

2. 2 4 1	INTERPOLACION DE UNA CURVA ASIMETRICA
	Valores de μ_2 y de μ_3 de la serie por interpolar
	$\mu_2 = 1.41787$ $\mu_3 = 3.606622$
2.2411	$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{3.606622}{1.731200} = 2.08331$
2.2412	$\beta_1 = \frac{-\gamma_3}{2} = \frac{-2.08331}{2} = -1.0417$
2.2413	Cálculo de D

205

2.2413	Cálculo de D
2.24131	$\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{-1.0417} = -0.959969$
2.24132	$D = \delta - \frac{1}{\beta_1} = o+0.959969$
2.2414	$A = -\beta_1 - \frac{1}{\beta_1} = 1.0417 - .959969$
2.2415	$R = \frac{1}{\beta_1^{2}} = \frac{-0.959969}{-1.0417} = 0.92157$

2. 2 4 1	INTERPOLACION DE UNA CURVA ASIMETRICA
2.2416	Cálculo de Y

$$Y = \frac{N}{(-\beta_1)^{R}\,\Gamma(R)} = \frac{251}{1.0417^{0.92157}\,\Gamma(0.92157)}$$

207

2.24161	$\Gamma(R-1) = \Gamma(R)/(R-1)$ $\Gamma(0.92157) = (1.92157)/(0.92157) =$ $= 1.05302$
2.24162	$1.04^{0.92}$ $\log 1.04 = 0.01703$ $\times 0.92 = 0.01567$ antilogaritmo de .01567 $\doteq$ 1.04
	$Y = \dfrac{251}{1.04 \times 1.05} = \dfrac{251}{1.09}$ $Y = 230.2$

2.241	INTERPOLACION DE UNA CURVA ASIMETRICA
2.24171	Substitución en la Fórmula Genérica $y = Y \quad (e^{D} \quad x \quad D^{A})^{1/\beta_1}$ $y = 192 \left[e^{\delta + 0.96} \, (\delta + 0.96)^{0.08} \right]^{-0.96}$

209

2.24181	Transformación de los datos a desviaciones sigmáticas+K				
	Datos de la serie		Calculo de las desviaciones		Transformación
	X	f	d	δ	δ + 0.96
	1	44	-1.3346612	-1.11	-0.15
	2	135	-0.3336612	-0.28	0.68
	3	45	0.6653388	0.55	1.51
	4	12	1.6653388	1.39	2.35
	5	8	2.6653388	2.22	3.18
	6	3	3.6653388	3.05	4.01
	7	1	4.6653388	3.88	4.84
	8	3	5.6653388	4.72	5.68

210

2.241	INTERPOLACION DE UNA CURVA ASIMETRICA
2.2472	Transformación de la Fórmula Genérica en Forma Logarítmica. Fórmula Genérica: $$y = 192 \left[\frac{e^{\delta + 0.96}}{(\delta + 0.96)^{0.08}} \right]^{-0.96}$$ Forma Logarítmica $$\log y = \log 192 - 0.96 \left[(\delta + 0.96) \log e + 0.08 \log (\delta + 0.96) \right]$$

211

2.24182	Cálculo de las yes teóricas					
	I D log e	II log D	III 0.08 log D	0.96 por (I + III)	(V)log192 menos .96(I+III)	y
	0.2953172	$\bar{1}$.83251	-0.0143992	0.269681280	2.01462	103
	0.6557779	0.17898	0.0143184	0.643292448	1.64001	44
	1.0205815	0.37107	0.0296856	1.008256416	1.27504	19
	1.3810422	0.50245	0.0401944	1.364387136	0.91891	8
	1.7415029	0.60314	0.0482512	1.718163936	0.56514	4
	2.1019636	0.68485	0.0547880	2.071481536	0.21282	2
	2.4667672	0.75435	0.0603480	2.426030592	-0.14373 $\bar{1}$.85627	1

212

3. 2 4 1	INTERPOLACION DE UNA CURVA DEL SUBSISTEMA SIMETRICO
	Valor de γ_4 en la serie por interpolar
3.2411	$\gamma_4 = 2.548313$
3.24121	$\beta_0 = \dfrac{-2\ \gamma_4}{5\gamma_4 - 9} = \dfrac{-2x2.548313}{5x2.548313 - 9}$
3.24122	$\beta_2 = \dfrac{-\ \gamma_4 + 3}{5\gamma_4 - 9} = \dfrac{-2.548313 + 3}{5x2,548313 - 9}$

213

3.24131	$$D^2 = \frac{\beta_0}{\beta_2} = \frac{-2\gamma_4}{5\gamma_4 - 9} \times \frac{5\gamma_4 - 9}{-\gamma_4 + 3} =$$ $$\frac{-2\gamma_4}{-\gamma_4 + 3} = \frac{-5.096626}{0.451687} = -11.2835348$$
3.24132	$$a = \frac{1}{2\beta_2} = \frac{5 \times 2.548313 - 9}{2(-2.548313 - 3)} = \frac{-3.741566}{2 \times 0.451687} =$$ $$\frac{3.741565}{0.903374} = 4.1417670$$

3. 2 4 .1	INTERPOLACION DE UNA CURVA DEL SUBSISTEMA SIMETRICO
	Cálculo de Y
3.2414	$$Y = \frac{\Sigma f}{D^{2\alpha-1}\sqrt{\pi}} \times \frac{\Gamma(a+1.5)}{\Gamma(a+1)}$$

215

3.24141	$$\frac{\Sigma f}{D^{2a-1}\sqrt{\pi}} = \frac{\Sigma f}{D\sqrt{\pi}} \text{ X } \frac{1}{D^{2a}} =$$ $$= \frac{1683}{4.54308 \times 1.77245} \text{ X } \frac{1}{11.28353^{4.14177}} =$$ $$= 209 \quad \text{X} \quad 0.44$$
3.24142	$$\frac{\Gamma(a + 1.5)}{\Gamma(a + 1)} = \frac{\Gamma(4.141767 + 1.5)}{\Gamma(4.141767 + 1)} =$$ $$= \frac{\Gamma(5.641767)}{\Gamma(5.141767)} =$$ $$= \frac{4.64 \times 3.64 \times 2.64 \times 1.64}{4.14 \times 3.14 \times 2.14 \times 1.14} \frac{\Gamma(1.64)}{\Gamma(1.14)} =$$ $$= \frac{73.125212 \times 0.84864}{31.713824 \times 0.93642} = 2.212756$$

3.2415	$Y = 209 \times 0.44 \times 2.212756$ $= 462.479 \times 0.44 = 203.49076$
	$y = Y(\delta^2 - D^2)^a$ $= 462.479 \times 0.44 (\delta^2 - 11.28353)^{4.14177}$ $y = 203.49076(\delta^2 - D^2)^a$ $\boxed{y = 203.49076(\delta^2 - 11.28353)^{4.14177}}$

217

4. 4 1	INTERPOLACION DE UNA CURVA PEARSONIANA DEL PRIMER TIPO
	Valores de γ_3 y de γ_4 en la serie por interpolar
4.411	$\gamma_3 = 0.7123$ $\gamma_4 = 2.93511$
4.412	$$B_2 = \frac{1}{b_2} = \frac{2(5\,\gamma_4 - 6\,\gamma_3^{\,2} - 9)}{2\,\gamma_4 - 3\,\gamma_3^{\,2} - 6)} =$$ $$= \frac{2(5x2.93511-6x0.5072955-9)}{2x2.93511-3x0.5072955-6} =$$ $$= \frac{2(14.67555 - 3.043777- 9)}{5.87022 - 1.5221887-6} =$$ $$= \frac{5.263556}{1.6516665} = \qquad 3.186815$$

218

4. 4 1	INTERPOLACION DE UNA CURVA PEARSONIANA DEL PRIMER TIPO
4.413	$B_2 = 3.186815$ $B_2 + 2 = 5.186815$ $B_2 + 3 = 6.186815$ $B_2 + 4 = 7.186815$ $\quad (B_2 + 4)^2 = 7.186815^2$ $=51.650309$

219

4. 4 1	INTERPOLACION DE UNA CURVA PEARSONIANA DEL PRIMER TIPO
4.4141	$a_1+a_2 = \frac{6}{2} \sqrt{\gamma_3^2 \quad (B + 4)^2 \quad + \quad 16(B_2 + 3)}$ $= \frac{2.768}{2} \sqrt{.5072955x51.650309 \quad + \quad 16x6.186815}$ $= 1.384 \sqrt{125.191009} \quad = \quad 1.384 \times 11.189 \quad = 15.48557$
4.4142	$m, M = \frac{1}{2} \left[B_2 \pm \frac{o\ v_3 \ (B_2 + 2)(B_2 + 4)}{2 \quad (a_1 + a_2)} \right]$ $= \frac{1}{2} \left[3.186815 \pm \frac{2.768x0.7123x5.186875x7.186815}{2 \times 15.48557} \right]$ $m=0.40688 \qquad M = 2.77983$

220

4.4143	$a_1 = m \dfrac{a_1 + a_2}{m + M} = 0.40688 \dfrac{15.48557}{3.18671} = 1.9772$ $a_2 = M \dfrac{a_1 + a_2}{m + M} = 2.77983 \dfrac{15.48557}{3.18671} = 13.50836$
4.4144	$Y_0 = 150.808$ (Véase el cuadro anexo)
4.4145	$y = 150.808 \left(1 + \dfrac{x}{1.9772}\right)^{0.40688} \left(1 - \dfrac{x}{13.50836}\right)^{2.77983}$

221

4.4143	CALCULO DE Y_O EN EL PRIMER TIPO DE CURVA PEARSONIANA
4.41430	$$Y_O = \frac{N}{a_1 + a_2} X \frac{m^m M^M}{(m + M)^{m+M}} X \frac{\Gamma(m + M + 1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(M+1)}$$
4.41431	$$\frac{N}{a_1 + a_2} = \frac{1\ 000}{15.48557} = 64.55$$

222

4.41432	$$\frac{m^m\ M^M}{(m\ +M)^{m+M}} = \frac{0.40688^{0.40688}\ 2.77983^{2.77983}}{3.18671^{3.18671}}$$ $0.40688 \log 0.40688 \doteq 0.4069 \times \bar{1}.60949 = -0.406900 + 0.248001$ $2.77983 \log 2.77983 \doteq 2.780 \times 0.44404 = +1.234431$ $-3.18671 \log 3.18671 \doteq -3.1867 \times 0.50338 = -1.604272$ $+1.482432 - 2.011172$ $= -0.528740$ $= +10\ -10\ -0.529740$ $= -10\ +9.471260$ $= \bar{1}.471260$ Antilog $\bar{1}.471260 = 0.2960$

4.41434	$$\frac{\Gamma(m+M+2)}{\Gamma(m+1)\Gamma(M+1)} = \frac{\Gamma(5.18671)}{\Gamma(3.77983)\,\Gamma(1.40688)} \doteq$$ $$\frac{\Gamma(5.19)}{\Gamma(3.78)\Gamma(1.41)}$$ $$\frac{4.19 \times 3.19 \times 2.19 \times 1.19\ \Gamma(1.19)}{2.78 \times 1.78 \times \Gamma(1.78)\Gamma(1.41)}$$ FUNCION Γ EN TABLAS. $$= \frac{13.3661 \times 2.6061 \times 0.92088}{4.9484 \times 0.92623 \times 0.88676} =$$ $$= \frac{34.83339 \times 0.92088}{4.58335 \times 0.88676} =$$ $$= \frac{32.07737}{4.06433} = 7.89241 =$$

224

4.41435	Valor de Y_0 cuyo equivalente pasa àl cuadro principal
	$Y_0 = \dfrac{N}{a_1 + a_2} \times \dfrac{m^m \; M^m}{(m + M)^{m+M}} \times \dfrac{\Gamma(m + M + 1)}{\Gamma(m+1)\Gamma(M+1)}$
	$Y_0 = 64.557 \times 0.296 \times 7.892 \doteq$ $\doteq 19.109 \times 7.892 = \boxed{150.808}$

225

4. 4	INTERPOLACION DE UNA CURVA PEARSONIANA (TIPO I)
4.41	Valores de γ_3 y γ_4 en la serie por interpolar
	$\mu_2 = 7.66237$; $\gamma_3 = 0.71224$; $\gamma_4 = 2.935110$
4.420	$D = 10\ \gamma_4 - 12\ \gamma_3^2 - 18$ $= 10x2.9355110 - 12x0.5072955 - 18 =$ $= 29.35110 - 6.08755 - 18 =$ $= 29.35110 - 24.09755 =$ $= 5.26355$

226

4.421	$b_0 = \mu_2 \; (4 \; \gamma_4 - 3 \; \gamma_3^{\,2}) \;/\; D =$ $= 7.66237(4x2.935110 - 3x0.5072955)/D =$ $= 7.66237(11.74044 - 1.52189)/D =$ $= 7.66237(10.21855)/D =$ $= 7.66237 \; x \; 1.94137 =$ 14.87545
4.422	$b_1 = -\sqrt{\mu_2} \; (\gamma_4 - 3)(- \gamma_3) \;/D =$ $= 2.767(2.935110 - 3)(-0.71224)/D =$ $= 2.767(5.935110) \; x \; (-0.71224)/D =$ $= 2.767(-4.22722)/D = 2.767 \; x \; 0.80311 =$ 2.22221
4.423	$b_2 =(-2 \; \gamma_4 + 3 \; \gamma_3^{\,2} + 6) \;/D$ $(-2x2.93511 + 3x0.5072955 + 6) \;/D =$ $= 1.65167/ \; D =$ 0.313793

227

4.441	$$R = \frac{\sqrt{b_1^2 + 4\ b_0\ b_2}}{2\ b_2} =$$ $$= \frac{\sqrt{2.2221^2 + 4x14.87545x0.313793}}{2x0.313793} =$$ $$= \frac{15.4745}{2} = 7.73725$$ $\boxed{2R = 15.4745}$
4.442	$$A = -\ b_1 - \frac{b_1}{2b_2} =$$ $$= -\ (2.2221) - \frac{-\ 2.2221}{2x0.313793} =$$ $$= 2.2221 + 3.5407 = \quad 5.7628$$

4.443	$$m + M = \frac{1}{b_2} \quad \frac{R \pm A}{2\,R}$$ $$= \frac{1}{0.313793} \; \frac{7.73725 \pm 5.7628}{15.4745} = \frac{7.73725 \pm 5.7628}{4.85578}$$ $$m = \frac{13.50005}{4.85578} = 2.7802$$ $$M = \frac{1.97445}{4.85578} = 0.40661$$
4.444	$Y' = 8.2614$ (para su cálculo, véase el anexo)
4.445	$$Y = 8.2614\,(X + 15.4745)^{0.40661}\,(X - 15.4745)^{2.7802}$$

229

4.444	CALCULO DEL PARAMETRO Y' DEL PRIMER TIPO DE CURVA
	$Y' = \dfrac{\Sigma f}{(2R)^{m+M+1}} \dfrac{(m + M + 2)}{(m+1)\ (M+1)}$
	$\dfrac{\Sigma f}{(2R)^{m+M+1}} = \dfrac{1\ 000}{15.4745^{2.780+0.40661+1}} = \dfrac{1\ 000}{15.4745^{4.18681}}$ 4.18681 log 15.4745 = 4.18681 x 1.18949 = 4.98017 Antilogaritma 4.98017 = 95536 $\dfrac{\Sigma f}{(2R)^{m+M+1}} = \dfrac{1\ 000}{95\ 536} = 0.104672$

230

	$$\frac{\Gamma(m + M + 2)}{\Gamma(m+1)\ (M+1)} = \frac{\Gamma(5.1868)}{\Gamma(3.7802)\ \Gamma\ (1.4060)} =$$ $$= \frac{\Gamma\ (5.19)}{\Gamma\ (3.78)\quad \Gamma\ (1.41)} =$$ $$\frac{4.19 \times 3.19 \times 2.19 \times 1.19\quad \Gamma\ (1.19)}{2.78 \times 1.78 \times \quad \Gamma\quad (1.78)\ \Gamma\ (1.41)} =$$ $$= \frac{13.3661 \quad x \quad 2.6061 \quad x \quad 0.92088}{4.9484 \quad x \quad 0.92623 \quad x \quad 0.88676} =$$ $$= \frac{34.8339 \quad x \quad 0.9209}{4.58336 \quad x \quad 0.88676} = \frac{32.0785}{4.0643}$$ $$= 0.78927$$
	$Y' = 0.104672 \times 0.78927 = 8.2614$

231

4.4	INTERPOLACION DE UNA CURVA PEARSONIANA (TIPO II)
4.41	Valores de μ_2, γ_3 y γ_4 en la serie por interpolar
4.41	$\mu_2 = 4.527608$; $\gamma_3 = 0.0053656$; $\gamma_4 = 3.169897$
4.420	$D = 2(5\ \gamma_4 - 6\ \gamma_3^{2} - 9) =$ $= 2(5x3.169897 - 6x0.0053656 - 9) =$ $= 2(15.849485 - 0.0321936 - 9) =$ $= 2(6.849485 - 0.032194) = 13.634584$

232

4.421	$b_0 = \mu_2 \; (4 \; \gamma_4 \; - 3 \; \gamma_3^{\,2} \;)/D =$ $= 4.527608(4x3.169897 - 3x0.0053656)/D =$ $= 4.527608(\; 12.679588 - \; 0.016097 \;)/D =$ $= 4.527608(\; 12.663491)/D = 57.335323 \; /D$
4.422	$b_1 = \sqrt{\mu_2} \; (\; -\gamma_3 \;) \; (\; \gamma_4 \; + 3) \; / \; D$ $= -\sqrt{4.527608} \; \sqrt{0.0053656} \; (3.169897 + 3) \; / \; D =$ $= -\sqrt{0.0242933} \; (6.169897) \; / \; D =$ $= \; (0.\;1\;5\;5\;9 \; x \; 6.169897) \; / \; D =$
4.423	$b_2 = (\; 2 \; \gamma_4 \; - 3 \; \gamma_3^{\,2} \; - 6) \; / \; D \; =$ $= (\; 2x3.169897 - 3x0.0053656 - 6) \; / \; D \; = 0.323697/D$

233

5. 2 1	INTERPOLACION DE UNA CURVA DEL CASO PARTICULAR 2
	Valores de μ_2, γ_3, γ_4 en la serie por interpolar
5.210	$\mu_2 = 3.573346$; $\gamma_3 = 0.7033$; $\gamma_4 = 3.996134$ $\gamma_3^2 = 0.4950399$
5.210	$D = 10\ \gamma_4 - 12\ \gamma_3^2 - 18 =$ $= 10x3.996134-12x0.4950399-18 =$ $= 16.020861$ $\boxed{D = 16.020861}$

234

5.212	$b_2 = (2 \gamma_4 - 3 \gamma_3^2 - 6) / D =$ $= (2x3.996134 - 3x0.4950399 -6) / D =$ $= (7.992268 - 1.4851197 -6) / D =$ $= (7.992268 - 7.4851197) / D =$ $= 0.507148 / D$
5.221	$\frac{1}{b_2} = \frac{D}{0.507148} =$ $= \frac{16.020861}{0.507148} =$ 31.590608

235

5.2221	$A = -b_1 - \frac{b_1}{2b_2} = -b_1\left(1 + \frac{1}{2b_2}\right) =$ $= -\frac{9.302165}{16.020861}\left(1 + \frac{16.020861}{2 \times 0.507148}\right) =$ $= -0.580628\left(1 + \frac{16.020861}{1.014296}\right) =$ $= -0.580628 \times 16.795054 = \qquad -9.7516786$
5.2222	$\frac{A}{b_2} = -9.7516786 \times 31.590608 = \qquad 308.061456$
5.23	$Y = Y' X^{31.590608} e^{308.061456/X}$

236

T A B L A S D E L A F U N C I O N G A M M A

n	Gamma de n	Gamma (n+1)	n	Gamma (n)	Gamma (n+1)
1.00	1.00000	1.00000	1.20	.91817	1.10180
1.01	.99433	1.00427	1.21	.91558	1.10785
1.02	.98884	1.00862	1.22	.91311	1.11399
1.03	.98335	1.01285	1.23	.91075	1.12022
1.04	.97844	1.01758	1.24	.90852	1.12656
1.05	.97350	1.02217	1.25	.90640	1.13300
1.06	.96874	1.02686	1.26	.90440	1.13954
1.07	.96415	1.03164	1.27	.90250	1.14618
1.08	.95973	1.03651	1.28	.90072	1.15292
1.09	.95546	1.04145	1.29	.89904	1.15976
1.10	.95135	1.04685	1.30	.89747	1.16671
1.11	.94739	1.05160	1.31	.89600	1.17376
1.12	.94359	1.05682	1.32	.89464	1.18092
1.13	.93993	1.06212	1.33	.89338	1.18819
1.14	.93642	1.06752	1.34	.89222	1.19557
1.15	.93304	1.07300	1.35	.89115	1.20305
1.16	.92980	1.07857	1.36	.89018	1.21060
1.17	.92670	1.08424	1.37	.88931	1.21835
1.18	.92373	1.09000	1.38	.88854	1.22619
1.19	.92088	1.09585	1.39	.88785	1.23411

237

TABLAS DE LA FUNCION GAMMA

n	Gamma (n)	Gamma(n + 1)	n	Gamma (n)	Gamma (n + 1)
1.40	.88726	1.24216	1.60	.89352	1.42963
1.41	.88676	1.25033	1.61	.89468	1.44043
1.42	.88636	1.25863	1.62	.89592	1.45139
1.43	.88604	1.26704	1.63	.89724	1.46250
1.44	.88580	1.27555	1.64	.89864	1.47377
1.45	.88565	1.28419	1.65	.90012	1.48520
1.46	.88560	1.29298	1.66	.90167	1.49677
1.47	.88563	1.30188	1.67	.90330	1.50851
1.48	.88575	1.31091	1.68	.90500	1.52040
1.49	.88595	1.32007	1.69	.90678	1.53246
1.50	.88623	1.32935	1.70	.90864	1.54469
1.51	.88659	1.33875	1.71	.91057	1.55707
1.52	.88704	1.34830	1.72	.91258	1.56964
1.53	.88757	1.35798	1.73	.91466	1.56236
1.54	.88818	1.36780	1.74	.91683	1.59528
1.55	.88887	1.37777	1.75	.91906	1.60835
1.56	.88964	1.38784	1.76	.92137	1.62161
1.57	.89049	1.39807	1.77	.92376	1.63505
1.58	.89142	1.40844	1.78	.92623	1.64869
1.59	.89243	1.41896	1.79	.92877	1.66250

238

TABLAS DE LA FUNCION GAMMA

n	Gamma (n)	Gamma (n+1)	n	Gamma (n)	Gamma (n+1)
1.80	.93138	1.67648	1.90	.96177	1.82736
1.81	.93408	1.69068	1.91	.96523	1.84359
1.82	.93685	1.70507	1.92	.96878	1.86006
1.83	.93969	1.71963	1.93	.97240	1.87673
1.84	.94261	1.73440	1.94	.97610	1.89363
1.85	.94561	1.74938	1.95	.97988	1.91077
1.86	.94869	1.76456	1.96	.98374	1.92813
1.87	.95184	1.77994	1.97	.98768	1.94573
1.88	.95507	1.79553	1.98	.99171	1.96359
1.89	.95838	1.81134	1.99	.99581	1.98166

239

I N D I C E

En la Imprenta Universitaria, bajo la dirección de Rafael Moreno, se terminó la impresión de Curvas Sociográficas, el día 30 de abril de 1969. Se tiraron 500 ejemplares.

Villegas CURVAS SOCIOGRAFICAS